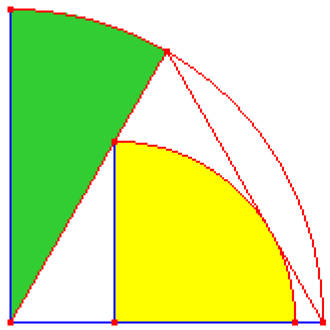
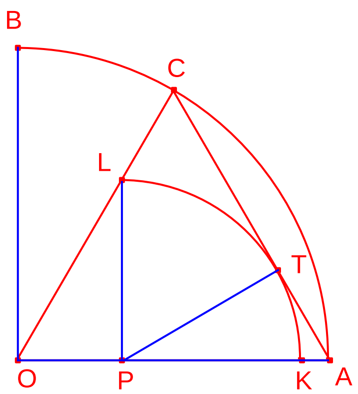
# Problemes de Geometria per a l'ESO 400

3991.- La figura està formada per dos quadrants i un triangle equilàter.
Calculeu la proporció entre l'àrea del sector verd i l'àrea del quadrant groc.



Solució




OA=R
PK=r

OPL, ATP iguals

OP=r·sqrt(3)/3

PA=2r·sqrt(3)/3

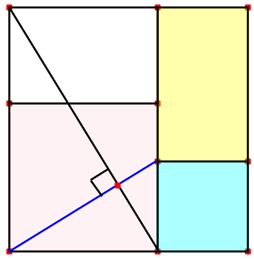
R=r·sqrt(3)

[quadrantP]=(1/4)·$r^2$

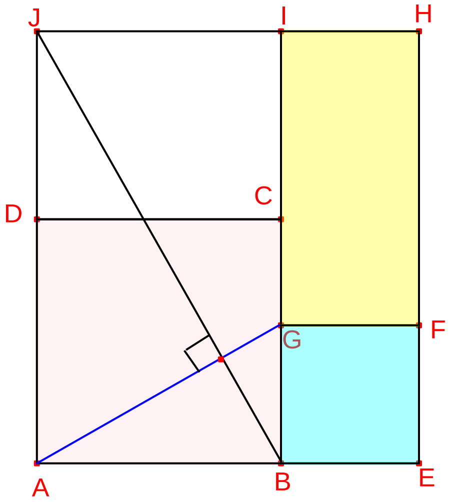
[SectorO]=(1/12)$R^2$

[SectorO]/[quadrantP]=1

3992.- La figura està formada per dos quadrats (rosa i blau) i dos rectangles (groc i blanc).
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat groc i la suma de les àrees dels quadrat blau i el rectangle groc.



Solució:




AB=AD=a

BE=BG=b

DJ=c

ABJ, BGA semblants

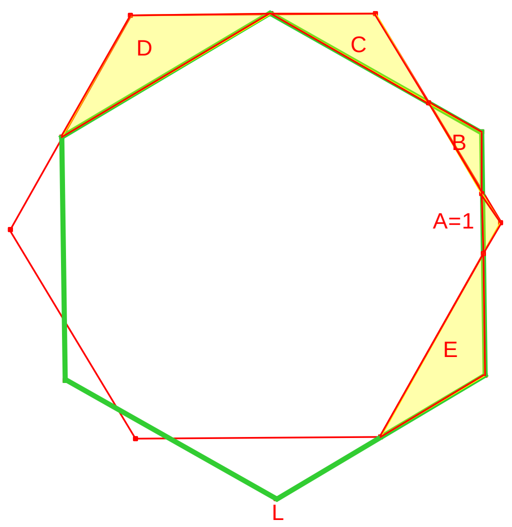
Teorema de Tales

$a/(a+c)=b/a$

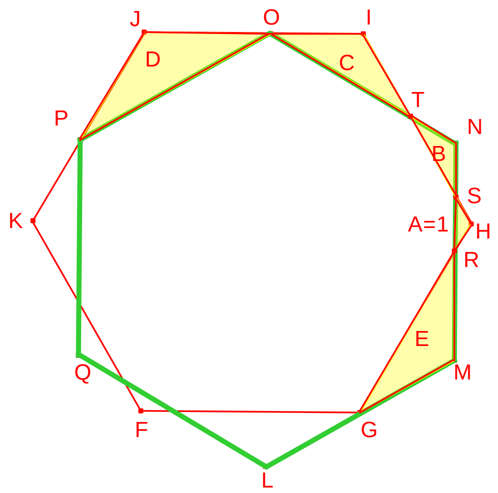
$b(a+c)=a^2$

$[ABCD]/([BEFG]+[GFHI])=a^2/(b(a+c))=1$

3993.- La figura està formada per dos hexàgons regulars que s'intersecten.
Si l'àrea del triangle ombrejat menut és $A = 1$, calculeu les àrees dels triangles $B, C, D, E$




Solució:

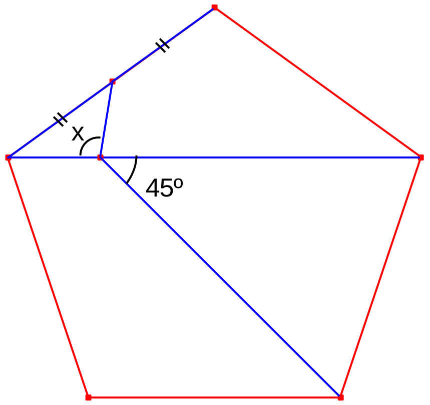



Els triangles ombrejats són isòsceles i semblants.
Siguen els hexàgons regulars $FGHIJK, LMNOPQ$.
Notem que $G$ és el punt mig del costat $\overline{LM}$
Siguen $\overline{HR} = \overline{HS} = a, \overline{NS} = \overline{NT} = b, \overline{IT} = \overline{IO} = c, \overline{JO} = \overline{JP} = d, \overline{MG} = \overline{MD} = e$
$\overline{OP} = \overline{LM}, d\sqrt{3} = 2e$
$\overline{OP} = \overline{ON}, d\sqrt{3} = b + c\sqrt{3}$

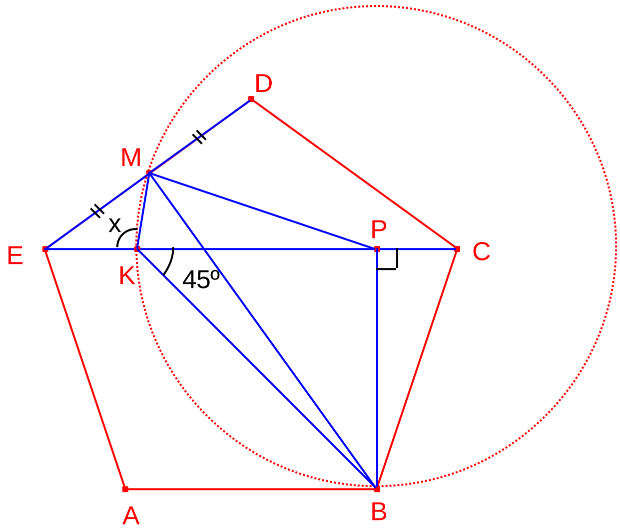
$\overline{MN} = \overline{OP}, d\sqrt{3} = b + e + a\sqrt{3}$
$$b + a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$$

$\overline{OJ} = \overline{TH}, d = a + b\sqrt{3}$
$d\sqrt{3} = a\sqrt{3} + 3b$
$b = a\sqrt{3}$
$d = 4a$
$$e = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$$
$\overline{OP} = \overline{ON}, d\sqrt{3} = b + c\sqrt{3}$
$c = 3a$
$A : B : C : D : E = a^2 : b^2 : c^2 : d^2 : e^2 = a^2 : 3a^2 : 9a^2 : 16a^2 : 12a^2$
Aleshores:
$B = 3, C = 9, D = 16, E = 12$

3994.- La figura està formada per un pentàgon regular.
Calculeu la mesura de l'angle $x$




Solució:




Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$$\overline{CE} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Siga $\angle CKB = 45°$

Siga $P$ la projecció de $B$ sobre $\overline{CE}$

$$\overline{PC} = \frac{\Phi - 1}{2}, \overline{EP} = \frac{1+\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPC}$:

$$\overline{BP}^2 = 1 - \left(\frac{\Phi - 1}{2}\right)^2 = \frac{2+\Phi}{4}$$

Aplicant el teorema del cosinus triangle $\overset{\Delta}{EPM}$:

$$\overline{PM}^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\Phi^2}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}\cdot\frac{\Phi^2}{2}\cdot\frac{\Phi}{2} = \frac{2+\Phi}{4}$$

Aleshores:

$\overline{PM} = \overline{BP} = \overline{PK}$

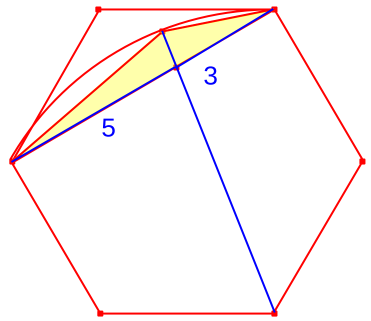
Considerem la circumferència de centre $P$ que passa pels punts $B, K, M$

$\angle EMB = 90°, \angle KMB = \angle CKB = 45°$

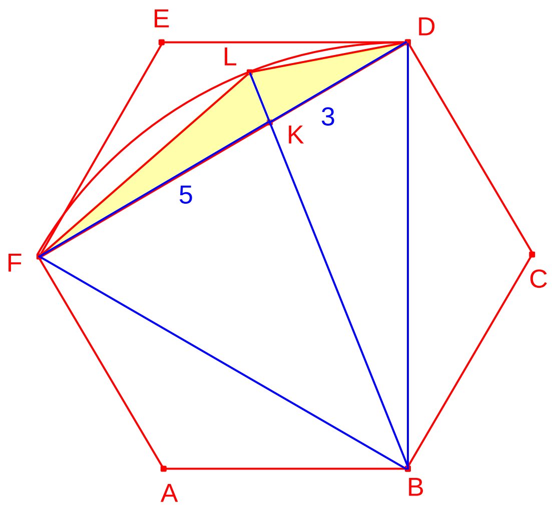
$\angle EMK = 45°$

$x = 180° - (45° + 36°) = 99°$

3995.- La figura està formada per un hexàgon regular i un arc de centre un dels vèrtexs de l'hexàgon.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.




Solució:




angleFBD=60º
BD=BL=BF=8

angleFLD=150º
a=DL, b=FL
angleLBD=x

Teorema sinus KBD
3/sin x = x/sin(60º+x)
sin x=3·sqrt(3)/14, cos x=13/14

teorema cosinus DBL
a²=2·64-2·64·cos x= 64/7
a=8·sqrt(7)/7

teorema cosinus BFL
b²=2·64-2·64·cos(60º-x)=192/7
b=8·sqrt(21)/7

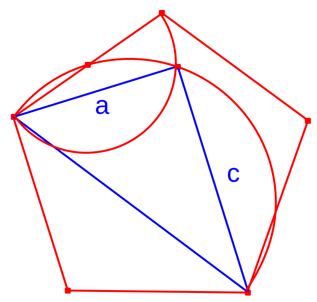
AB=8·sqrt(3)/3

[ABCDEF]=32·sqrt(3)

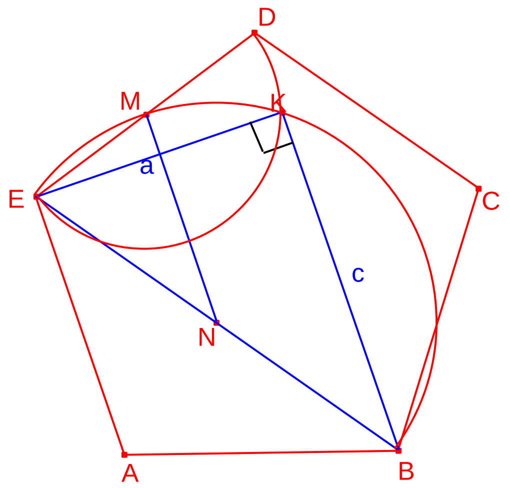
[FLD]=(1/2)a·b·sin 150º=16·sqrt(7)/7

[FLD]/[ABCDEF]=1/14

3996.- La figura està formada per un pentàgon regular i dos semicercles.
Calculeu la proporció dels segments $a : c$




Solució:




AB=1, BE=phi

ME=MK=1/2

MN=x

Teorema cosinus EMN

$x^2=1/4+(1+phi)/4-phi/2\cdot\cos72^{o}=phi^2/4$

NK=NE=NK=phi/2

angleENM=36º, angle ENK=72

Teorema cosinus ENK

$a^2=phi^2/2-phi^2/2\cdot\cos72^{o}=phi^2(4-phi^2)/4$

Teorema Pitàgores EKB

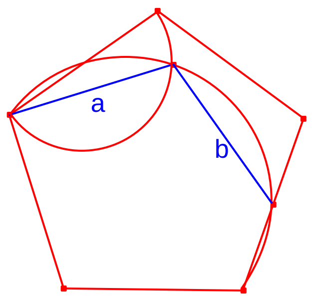
$c^2=phi^2-a^2=phi^4/4$

$a^2/c^2=7-4phi$

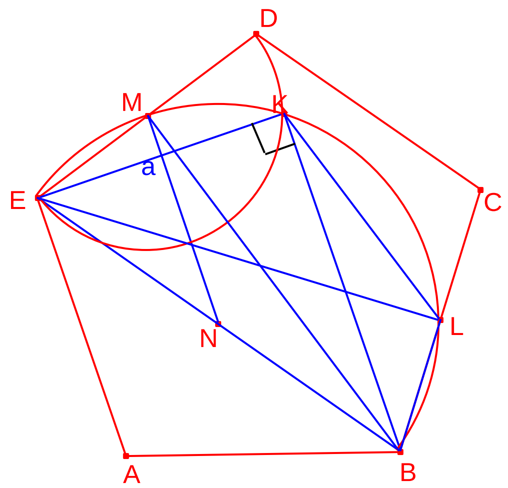
a/c=sqrt(7-4phi)

Resultado: 0,7265425280

3997.- La figura està formada per un pentàgon regular i dos semicercles.
Calculeu la proporció dels segments $a : b$




Solució:




AB=1, BE=phi

ME=MK=1/2

MN=x

Teorema cosinus EMN

$x^2=1/4+(1+phi)/4-phi/2\cdot\cos 72^\circ=phi^2/4$

NK=NE=NK=phi/2

angleENM=36º, angle ENK=72º

EM=BL

angleELK=angleEBK=36º

angleLEB=angleEMB=18º

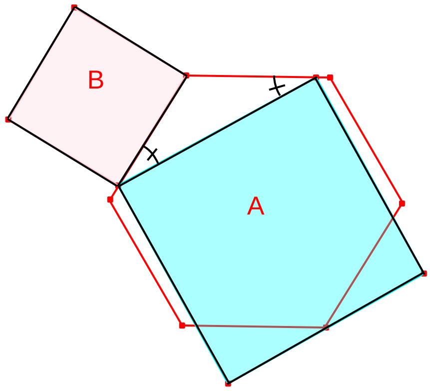
angleKEB=90º-36º=54º

angleKEL=54º-18º=36º

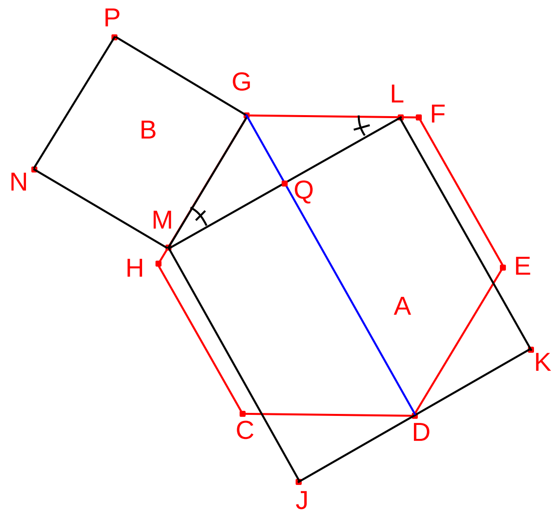
EK=LK

a : b = 1 : 1

3998.- La figura està formada per un hexàgon regular i dos quadrat d'àrees $A, B$.
Calculeu la proporció $A : B$

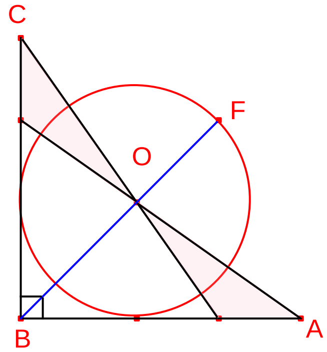



Solució:
Siga l'hexàgon regular $CDEFGH$ de costat $\overline{CD} = 1$
Siga el quadrat $JKLM$ de costat $\overline{JK} = c$
Siga el quadrat $GMNP$ de costat $\overline{GM} = x$
$\overline{GL} = x, \overline{ML} = x\sqrt{3} = c$
$\overline{GQ} = \frac{1}{2}x$
$\overline{DG} = c + \frac{1}{2}x = 2$
Resolent el sistema:
$c = \frac{24-4\sqrt{3}}{11}, x = \frac{8\sqrt{3}-4}{11}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{A}{B} = \left(\frac{c}{x}\right)^2 = \left(\frac{24-4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}-4}\right)^2 = 3$



3999.- En la figura, $\overline{OF} = \sqrt{2}$, $\overline{BA} = \overline{BF} = \overline{BC}, \angle ABC = 90°$

Calculeu l'àrea de la zona ombrejada i la mesura de l'angle $\angle AFC$

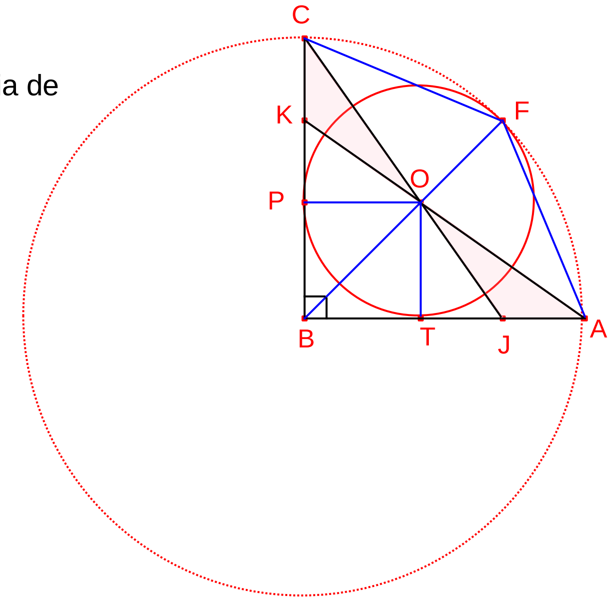



Solució:

Considerem la circumferència de centre $B$ que passa per $A, F, C$ ja que $\overline{BA} = \overline{BF} = \overline{BC}$

L'angle inscrit a la circumferència, mesura la meitat de l'arc que abraça:

$\angle AFC = \frac{1}{2} \cdot 270° = 135°$




Siga $T$ el punt de tangència de la circumferència de centre $O$.

$\overline{BT} = \overline{OP} = \overline{OT} = \sqrt{2}$

$\overline{BO} = 2, \overline{BC} = \overline{BT} = 2 + \sqrt{2}$

$\overline{TA} = 2$

Els triangles rectangles $K\overset{\Delta}{B}A, O\overset{\Delta}{T}A$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{BK}}{\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

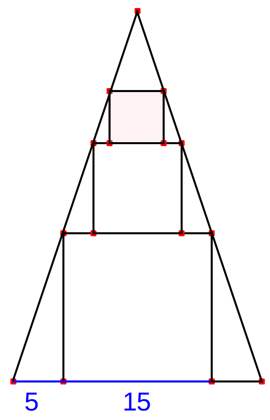
$\overline{BK} = 1 + \sqrt{2}$

$\overline{CK} = 1$

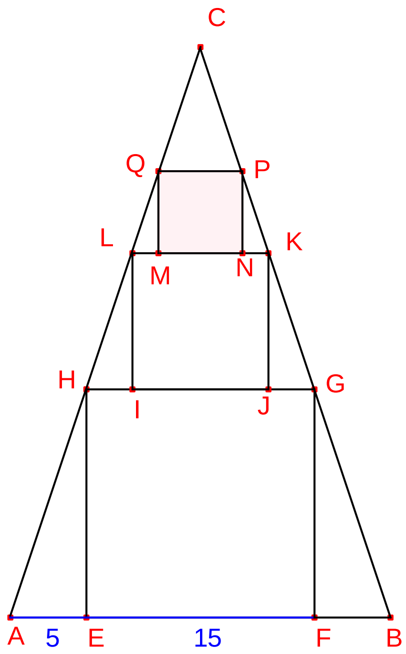
L'àrea ombrejada és:

$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{CKO} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

4000.- La figura està formada per un triangle isòsceles que en el seu interior conté tres quadrats.
Calculeu l’àrea del quadrat ombrejat.




Solució:




AB=25

HG=15

IJ/EF=15/25=3/5

IJ=9

MN/HG=9/15=3/5

MN=27/5

$[MNPQ]=(27/5)^2=729/25$