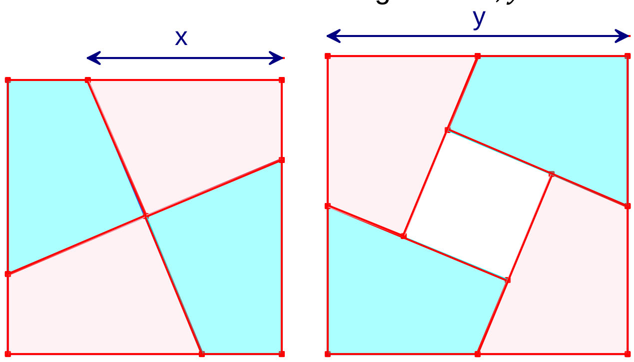
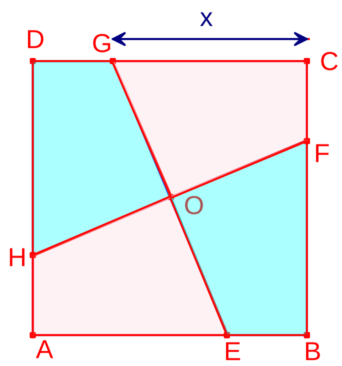
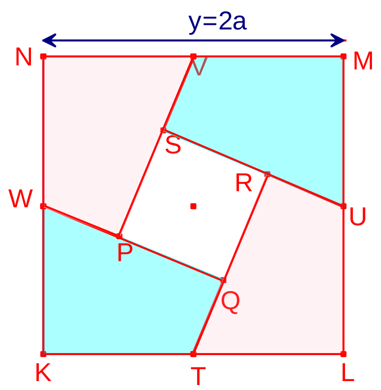
4001.- El quadrat de l'esquerra el seu costat 24 s'ha dividit en quatre quadrilàters iguals..
En el quadrat de la dreta està format pels quatre quadrilàters i el quadrat blanc interior que té costat 10.
Calculeu les mesures dels segments x, y



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 24$ de centre O.
El punt O és la intersecció dels quatre quadrilàters iguals.
$\overline{CG} = \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{DH} = x$
$\overline{DG} = \overline{AH} = \overline{CF} = \overline{BE} = 24 - x$
Siga $\overline{OG} = \overline{OE} = \overline{OE} = \overline{OH} = a$

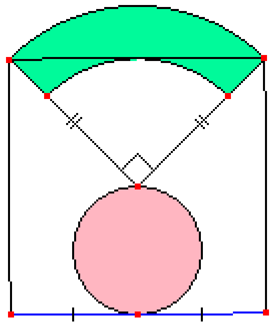


Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = y$
$\overline{KT} = \overline{LT} = \overline{LU} = \overline{MU} = a$
$y = 2a$
$\overline{PG} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{PS} = 10$
$\overline{SV} = \overline{WP} = 24 - x, \overline{PV} = x$

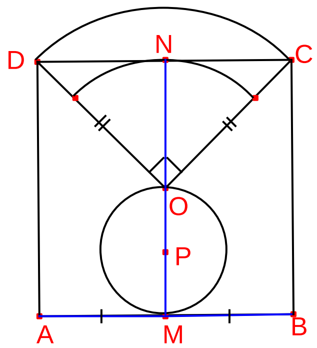


$24 - x + 10 = x$
Resolent l'equació:
$x = 17$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles
$\overset{\Delta}{WNV}, \overset{\Delta}{WPV}$:
$2a^2 = 17^2 + 7^2$
Resolent l'equació:
$a = 13$
$y = 2a = 26$

4002.- La figura està formada per un quadrat un cercle i dos quadrants.
Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea verda.



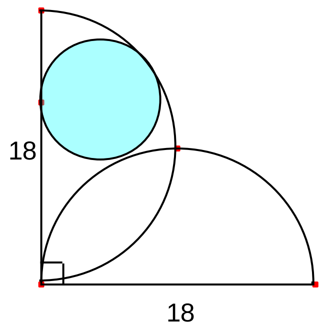
Solució:



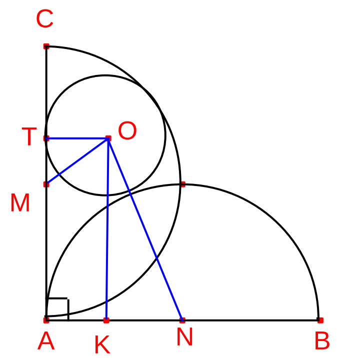
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O (centre dels dos quadrants) i costat $\overline{AB} = 4$
Siguen M, N els punts migs dels costat $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
Siga P el centre de la circumferència de radi $\overline{PO} = \overline{PM} = 1$
Els radis dels quadrants són $\overline{PC} = 2\sqrt{2}, \overline{PN} = 2$
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{rosa}}{S_{verda}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{\frac{1}{4}\pi\left(\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2^2\right)} = 1$$

4003.- La figura està formada per dos semicercles i un cercle tangent als semicercles.
Calculeu l'àrea del cercle.



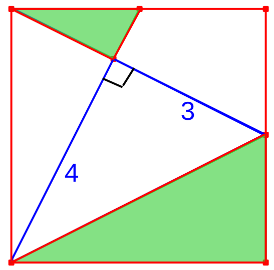
Solució:
Siguen les semicircumferències de diàmetres $\overline{AB} = \overline{AC} = 18$
Siguen M, N els punts migs dels segments $\overline{AC}, \overline{AB}$ respectivament.
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = r$
Siga $\overline{TM} = a$
Siga K la projecció de O sobre $\overline{AB}$
$\overline{MO} = 9 - r, \overline{NO} = 9 + r, \overline{NK} = 9 - r, \overline{AT} = 9 + a$



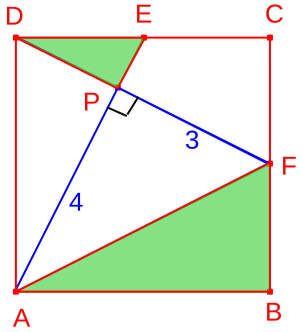
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MTO}$:
$(9 - r)^2 = a^2 + r^2$
Simplificant:
$a^2 = 81 - 18r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKN}$:
$(9 + r)^2 = (9 + a)^2 + (9 - r)^2$
Simplificant:
$36r = 81 + a^2 + 18a$
Resolent el sistema format per ambdues expressions:
$a = 3, r = 4$
L'àrea del cercle ombrejat és:
$S_O = \pi r^2 = 16\pi$

4004.- La figura està formada per un quadrant i dos segments perpendicular.
Calculeu l'àrea dels dos triangles ombrejats.



Solució:



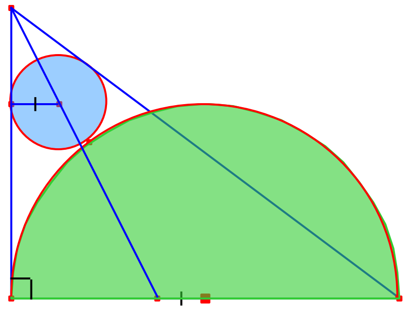
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen els segments perpendiculars $\overline{AE}, \overline{DF}$ que s'intersecten en el punt P i tals que
$\overline{PA} = 4, \overline{PB} = 3$
$\overline{AF} = 5$
Siga $\overline{BF} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$25 = a^2 + c^2$
$\overline{DP} = \sqrt{c^2 - 16}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{DCF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c - a}{3 + \sqrt{c^2 - 16}} = \frac{\sqrt{c^2 - 16}}{4}$$
Simplificant:
$6\sqrt{c^2 - 16} + 2ac - a^2 - c^2 - 7 = 0$
Substituint $a = \sqrt{25 - c^2}$
$2c\sqrt{25 - c^2} + 6\sqrt{c^2 - 16} - 32 = 0$
Resolent l'equació:
$c = 2\sqrt{5}, a = \sqrt{5}$
$\overline{DP} = 2$

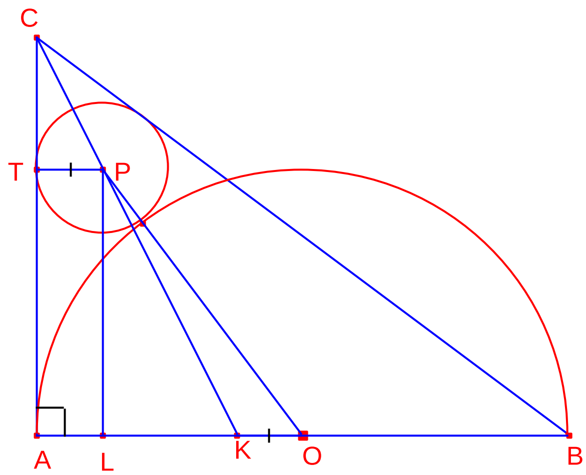
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{DPE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{PE} = 1$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = S_{ABF} + S_{DPE} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 5 + 1 = 6$$

4005.- La figura està formada per un cercle tangent a un semicercle i a un triangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 2r$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = a$



Siga $\overline{OK} = a$
Siguen $\overline{PL} = b, \overline{CT} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PLO}$:
$b^2 = 4ar$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CTP}, \overset{\Delta}{PLK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{r - 2a} = \frac{b + c}{r - a}$$

$$b + c = \frac{b}{r - 2a}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\overline{BC} = \sqrt{(b + c)^2 + 4r^2}$$

$\overline{CK}$ és la bisectriu del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{r - a}{b + c} = \frac{r + a}{\sqrt{(b + c)^2 + 4r^2}}$$

Elevant al quadrat

$$\frac{(r - a)^2}{\left(\frac{b}{r - 2a}\right)^2} = \frac{a}{r}$$

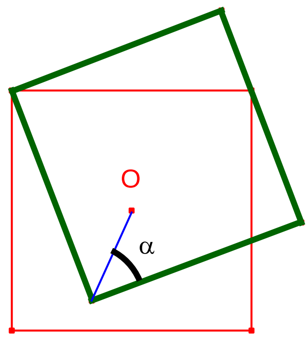
Resolent l'equació:

$$a = \frac{1}{4}r$$

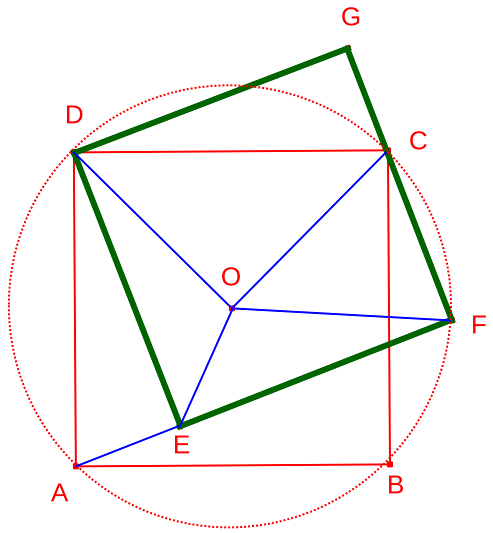
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{1}{8}$$

4006.- La figura està formada per dos quadrats un d'ells de centre O.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:



DEA, DGC iguals

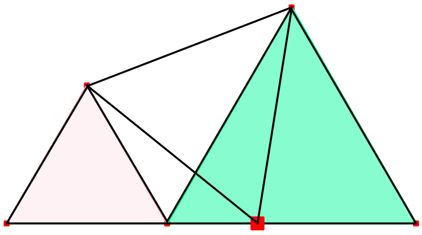
A, E, F, alineats

angleFAB = angle BCF
ABFCD inscriptible
OD = OF

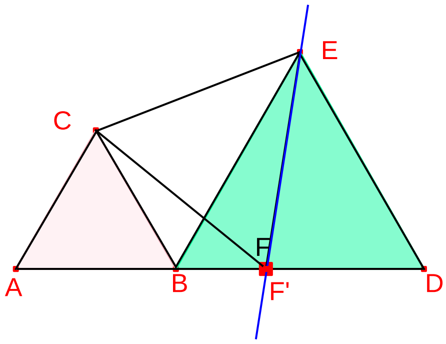
EO mediatriu DF

angle OEF=45º

4007.- Dos triangles equilàters comparteixen un vèrtex i tenen les bases en la mateixa recta.
A partir dels seus vèrtexs es construeix un tercer triangle equilàter.
Demostreu que el seu vèrtex pertany a la recta.



Solució:



AngleCEB=angleDEF

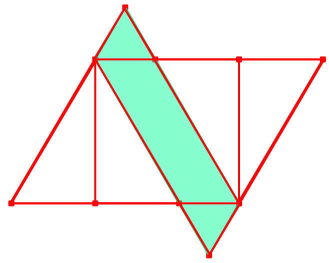
F' intersecció EF i AD

Els triangles CBE, F'DE iguals

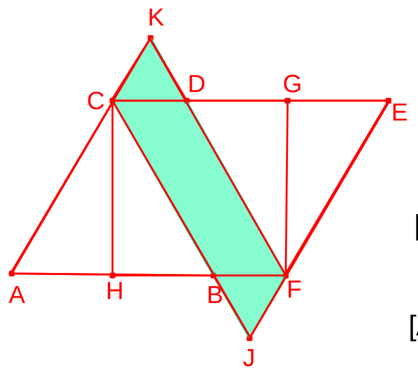
EF'=CE

F=F'

4008.- La figura està formada per triangles equilàters i un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



Solució:



AB=2
CH=sqrt(3)
DG=1
CD=sqrt(3)-1

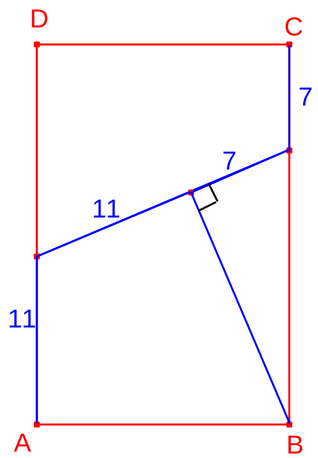
[JFKC]=2[CDK]+[BFDC]

[JFKC]=2·sqrt(3)/4·(sqrt(3)-1)+sqrt(3)(sqrt(3)-1)=sqrt(3)

[ABJEDK]=[JFKC]+2[ABC]
[ABJEDK]=sqrt(3)+2·sqrt(3)=3·sqrt(3)

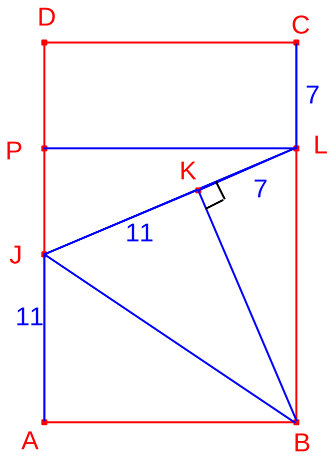
[JFKC]/[ABJEDK]=1/3

4009.- Calculeu l’àrea del rectangle $ABCD$.



Solució:

Siguen $\overline{AB} = a, \overline{AD} = b$ costats del rectangle $ABCD$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JAB}, \overset{\Delta}{JKB}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{BK} = a$

Siga P la projecció de L sobre $\overline{AD}$

$\overline{BL} = b - 7, \overline{JP}?\, b - 18$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKL}$:

$(b-7)^2 = 49 + a^2$

$a^2 - b^2 = -14b$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JPL}$:

$18^2 = (b-18)^2 + a^2$

$a^2 + b^2 = 36b$

Restant ambdues expressions:

$2b^2 = 50b$

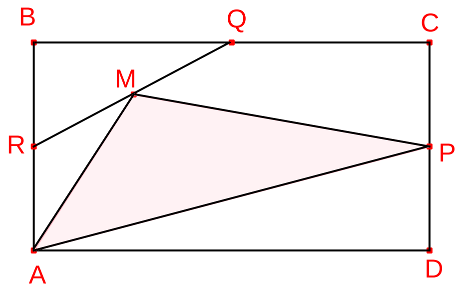
Resolent l’equació:

$b = 25, a = 5\sqrt{11}$

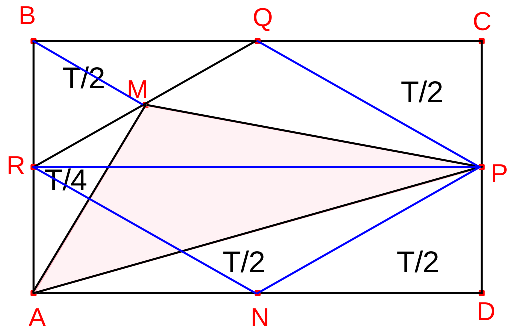
L’àrea del rectangle $ABCD$ és:

$S_{ABCD} = ab = 125\sqrt{11}$

4010.- La figura està formada per un rectangle $ABCD$.
P, Q, R, M són els punts migs dels segments $\overline{CD}, \overline{BC}, \overline{AB}$ i $\overline{QR}$, respectivament.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMP}$ i el rectangle $ABCD$.



Solució:
Siguen $\overline{AD} = 2a, \overline{AB} = 2b$, costats del rectangle.
Siga $T = ab$
Siga N el punt mig del costat $\overline{AD}$



$$S_{RBQ} = S_{QCP} = S_{NDP} = S_{ANP} = \frac{1}{2}T$$
$$S_{ARM} = S_{RBM} = \frac{1}{2}S_{RBQ} = \frac{1}{4}T$$
$$S_{ABCD} = 4T$$
$$S_{NPQR} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2T$$
$$S_{RPQ} = \frac{1}{2}S_{NPQR} = T$$
$$S_{MPQ} = \frac{1}{2}S_{RPQ} = \frac{1}{2}T$$
$$S_{AMP} = S_{ABCD} - \left(S_{RBQ} + S_{MQP} + S_{QCP} + S_{ADP} + S_{ARM}\right) =$$
$$= 4T - \left(\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T + T + \frac{1}{4}T\right) = \frac{5}{4}T$$

La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5}{4}T}{4T} = \frac{5}{16}$$