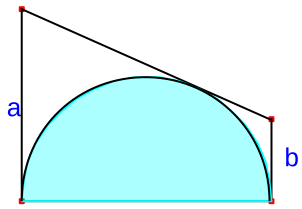
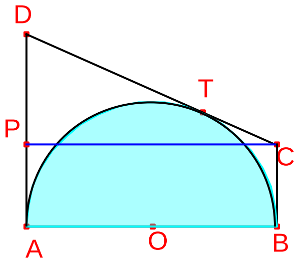
4011.- La figura està formada per un semicercle i tres segments tangents.
Calculeu l'àrea del semicercle en termes de a, b



Solució:



CB=CT=b, DA=DT=a

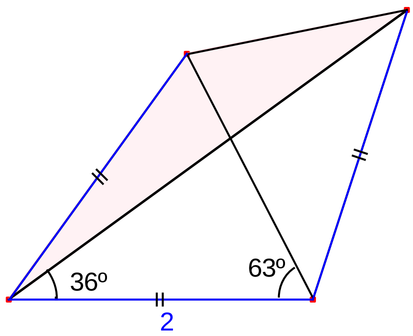
CD=a+b, DP=a-b

Teorema Pitàgores DPC

$PC^2=4ab$

$S=(1/2)Pi\cdot PC^2/4=ab\cdot Pi/2$

4012.- En la figura, calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:

Siga el quadrilàter $ABCD$, $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC} = 2, \angle CAB = 36°, \angle ABD = 63°$

$\angle ACB = 36°, \angle ABC = 108°, \angle ADB = 63°$

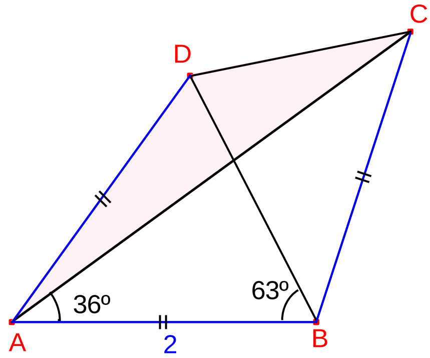
$\angle DAC = 18°$

$\overline{AC} = \Phi \cdot \overline{AB} = 2\Phi$

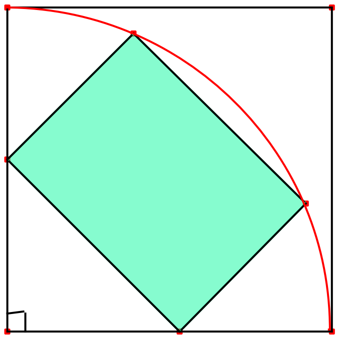
$\sin 18° = \dfrac{\Phi - 1}{2}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és:

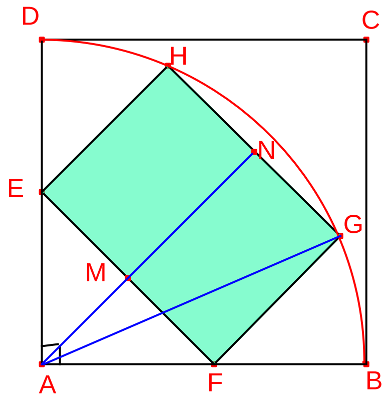
$S_{ACD} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\Phi \cdot \sin 18° = \Phi(\Phi - 1) = 1$



4013.- Un quadrat té inscrit un quadrant.
El quadrant té inscrit un rectangle.
Calculeu la proporció màxima entre l'àrea del rectangle i l'àrea del quadrat.

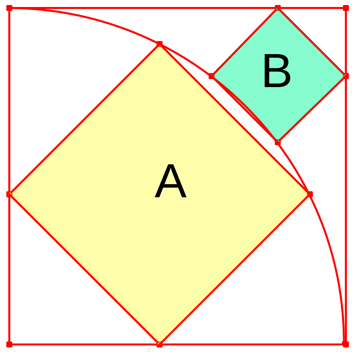


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga $\overline{AF} = a$
Siga $\overline{EH} = b$
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és isòsceles.
$\overline{EF} = a\sqrt{2}$
L'àrea del rectangle $EFGH$ és:
$S_{EFGH} = ab\sqrt{2}$

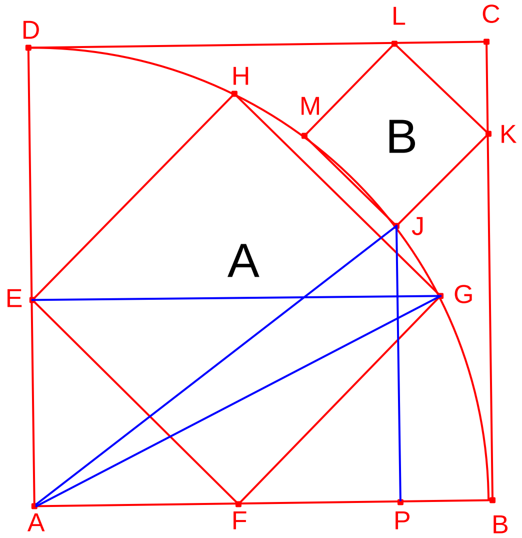


$\overline{AG} = 1, \overline{NG} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \overline{AN} = b + \frac{\sqrt{2}}{2}a$
aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANG}$
$$1 = \frac{1}{2}a^2 + \left(b + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$
$$a^2 + \sqrt{2}ba + b^2 - 1 = 0$$
$$a = \frac{-b\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2b^2}}{2}$$
La proporció d'àrees és:
$$P(b) = \frac{-b\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2b^2}}{2} b\sqrt{2}$$
$$P'(b) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-2\sqrt{2}b + \frac{4 - 4b^2}{\sqrt{4 - 2b^2}}\right)$$
$$2P'(b) = 0$$
$$b\sqrt{2} = \frac{2 - 2b^2}{\sqrt{4 - 2b^2}}$$
Elevant al quadrat i simplificant:
$$2b^4 - 4b^2 + 1 = 0$$
$$b^2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4}$$
$$P"\left(\frac{4 - 2\sqrt{2}}{4}\right) < 0$$
$$b = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2}, a = \frac{-\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$
L'àrea màxima del rectangle $EFGH$ és:
$$P_{màx} = \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2} - 1$$

4004.- Un quadrat té inscrit un quadrant.
El quadrant té inscrit un quadrat d'àrea A
Un altre quadrat d'àrea B conté dos vèrtexs en el quadrant i en quadrat.
Calculeu la proporció $A : B$.



Solució:



AB=1
EF=c, JK=d

Teorema Pitàgores AEG

$c^2=2/5$

PJ=1-d·sqrt(2)

AP=1-(d/2)sqrt(2)

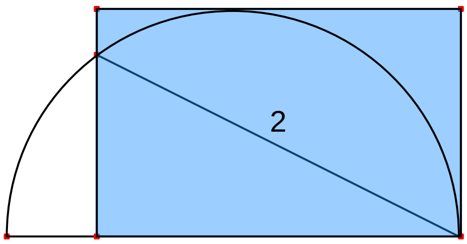
Teorema Pitàgores APJ

$5d^2-6\cdot\text{sqrt}(2)d+2=0$

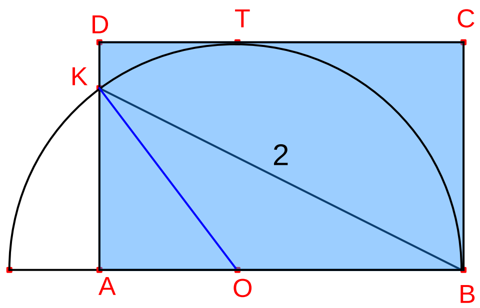
$d^2=2/25$

$A : B = c^2 : d^2 = 5 : 1$

4005.- La figura està formada per un semicercle una corda de longitud 2 i un rectangle.
Calculeu l'àrea del rectangle



Solució:



OB=r, DT=a

BC=r, AB=a+r

[ABCD]=r^2+ar

Teorema Pitàgores OAK

$AK^2=r^2-a^2$

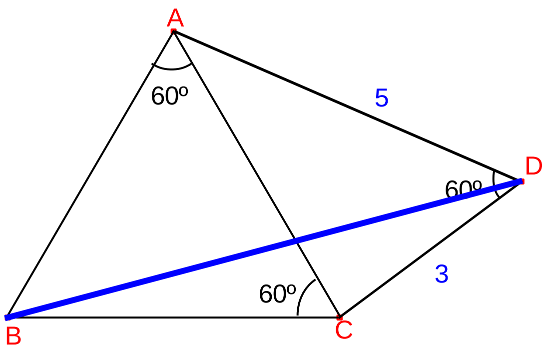
Teorema Pitàgores BAK

$AK^2=4-(r+a)^2$

$2r^2+2ra=4$

[ABCD]=2

4016.- En el quadrilàter $ABCD$ de la figura,
$\overline{CD} = 3, \overline{AD} = 5$, $\angle BCA = \angle BAC = \angle CDA = 60°$
Calculeu la mesura del segment $\overline{BD}$



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\overline{AC}^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 19$$

Siga $\alpha = \angle CAD$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\frac{3}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

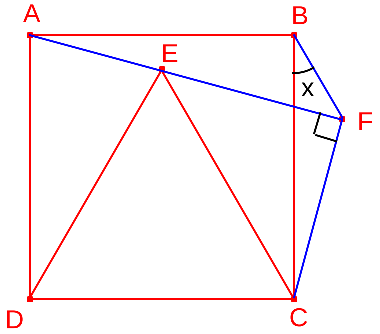
$$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}, \cos\alpha = \frac{7}{2\sqrt{19}}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

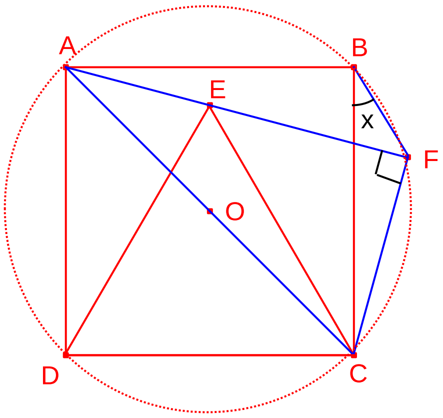
$$\overline{AD}^2 = 19 + 25 - 2 \cdot \sqrt{19} \cdot 5 \cdot \cos(60° + \alpha) = 44 - 2\sqrt{19} \cdot 5 \left(\frac{1}{2}\frac{7}{2\sqrt{19}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}\right) = 49$$

$$\overline{AD} = 7$$

4017.- La figura està formada per un quadrat i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

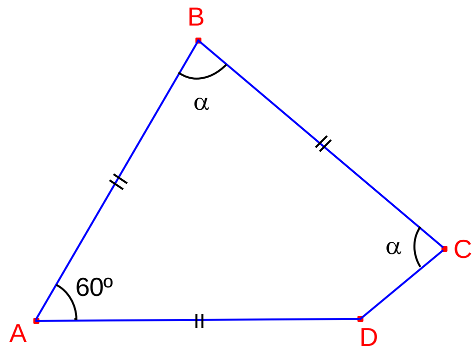


AB=1
angleBAF=15º

angleCEF=45º
angleBCF=45º-30º=15º
ACFB cíclic
ADCFB cíclic

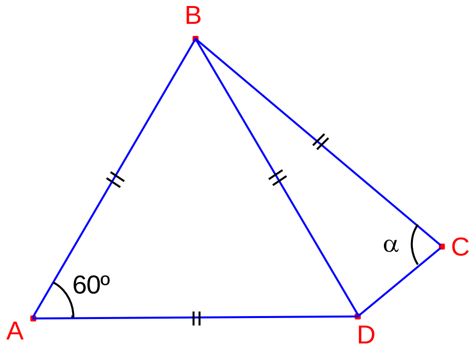
CF=sqrt(2)/2
AC=sqrt(2)
Angle CAF=30º
x=angleCBF=angleCAF=30º

4018.- En el quadrilàter $ABCD$ de la figura $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$,
$A = 60°, B = C = \alpha$
Calculeu la mesura de l'angle α

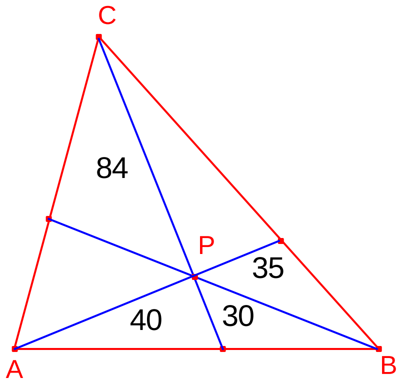


Solució:

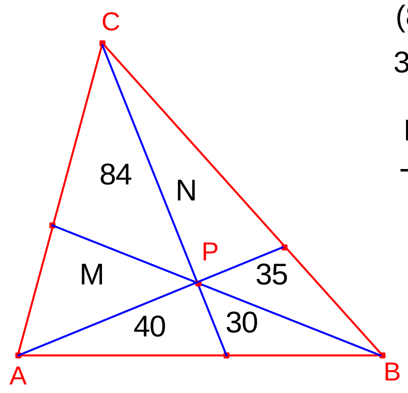
El triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és equilàter.
$\overline{BD} = \overline{AB}$
$\angle ABD = 60°, \angle DBC = \alpha - 60°$
El triangle $\overset{\Delta}{DBC}$ és isòsceles:
$\angle BDC = \alpha$
La suma dels angles d'un triangle és 180º:
$\alpha - 60° + \alpha + \alpha = 180°$
Resolent l'equació:
$\alpha = 80°$



4019.- La figura està formada per un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i tres cevianes que es tallen en el punt P.
Les cevianes divideix el triangles en sis parts, de les quals es coneixen quatre àrees.
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:



(84+M)3=(N+35)4

3M-4N=-112

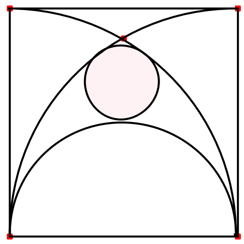
N/35=(M+84)/(40+30)

-M+2N=84

M=56, N=70

[ABC]=315

4020.- La figura està formada per un quadrant de costat 6, una semicircumferència, dos quadrants i un cercle. Calculeu el radi del cercle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 6$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = r$
$\overline{OM} = 3 + r, \overline{BO} = 6 - r, \overline{BM} = 3$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:
$(6 - r)^2 = 3^2 + (3 + r)^2$
Resolent l'equació:
$r = 1$