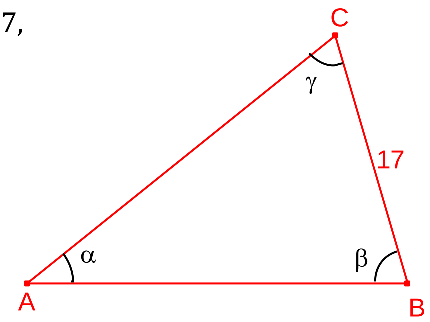
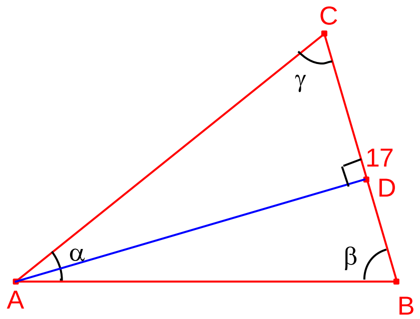
4021.- Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ si $\overline{BC} = 17$, $\sin\beta = \frac{24}{25}, \sin\gamma = \frac{12}{13}$



Solució:

$\cos\beta = \frac{7}{25}, \tan\beta = \frac{24}{7}$

$\cos\gamma = \frac{5}{13}, \tan\gamma = \frac{12}{5}$



Siguen $\overline{CD} = h$ altura del triangle, $\overline{CD} = x, \overline{BD} = 17 - x$

$\frac{x}{h} = \tan\gamma = \frac{12}{5}$

$\frac{h}{17 - x} = \tan\beta = \frac{24}{7}$

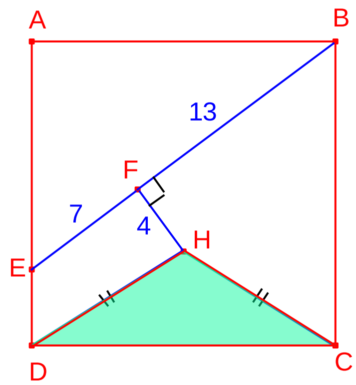
Resolent el sistema:

$x = 10, h = 24$

L'àrea del triangle és:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 24 = 204$

4022.- Donat el quadrat $ABCD$, calculeu l'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DHC}$



Solució:

Siguen L, M els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.

Considerem la mediatriu del costat $\overline{CD}$ que talla el segment $\overline{BE}$ en el punt mig N del segment.

$\overline{EN} = \overline{BN} = 10$

$\overline{FN} = 3$

$\overline{HN} = 4$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HFN}, \overset{\Delta}{BAE}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

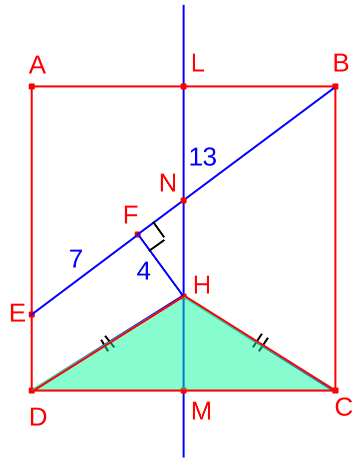
$\overline{AB} = 16$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HFN}, \overset{\Delta}{BLN}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{LN} = 6$

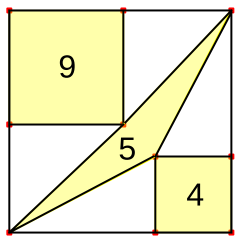
$\overline{MH} = 16 - (5 + 6) = 5$



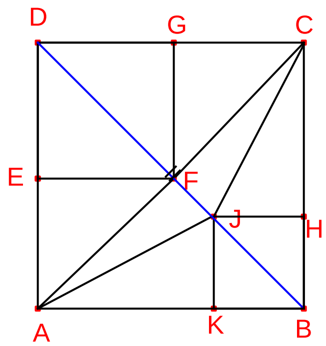
L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DHC}$ és:

$$S_{DHC} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 5 = 40$$

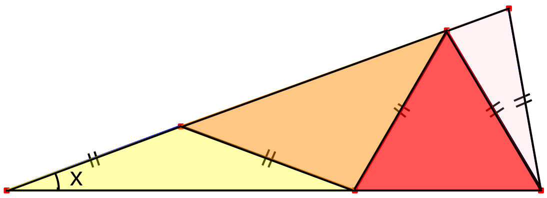
4023.- En l'interior d'un quadrat s'han ombrejats dos quadrats i un triangles d'àrees 9, 4 i 5.
Calculeu la proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



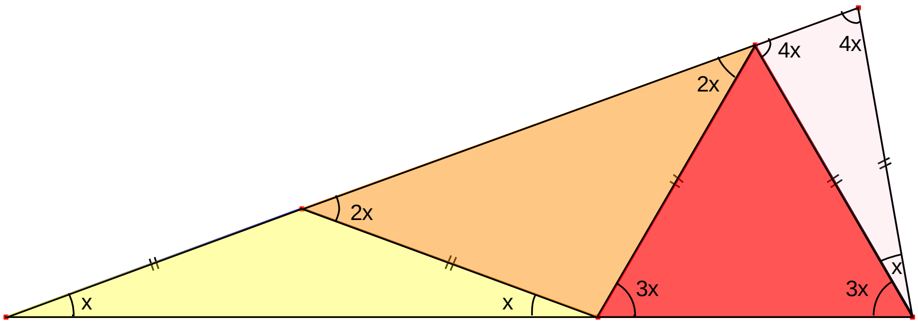
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = 3$
Siga el quadrat $BHJK$ de costat $\overline{BH} = 2$
Siga $\overline{FJ} = a$
$\overline{BD} = \overline{AC} = c\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + a + 2\sqrt{2}$
$c\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + a$
$a = (c-5)\sqrt{2}$
L'àrea del quadrilàter $AJCF$ és:
$\frac{1}{2}ac\sqrt{2} = 5$
$2c^2 - 10c - 10$
Resolent l'equació:
$$c = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$$
$$S_{ABCD} = c^2 = \frac{5}{2}\left(7+3\sqrt{5}\right)$$
La proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat és.
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{9+5+4}{\frac{5}{2}\left(7+3\sqrt{5}\right)} = \frac{9}{5}\left(7-3\sqrt{5}\right) \approx 0.5252$$



4024.- Un triangle isòsceles s'ha dividit en quatre triangles isòsceles. Calculeu la mesura de l'angle x



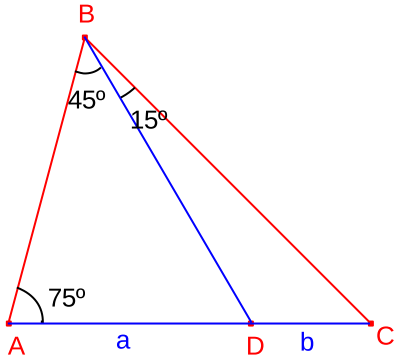
Solució:



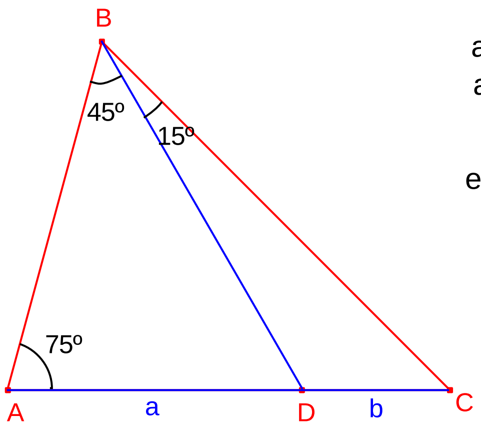
4x+4x+x=180º

x=20º

4025.- En la figura, $\angle BAC = 75°, \angle ABD = 45°, \angle DBC = 15°$
Siga $\overline{AD} = a, \overline{CD} = b$
Calculeu $\frac{a}{b}$



Solució:

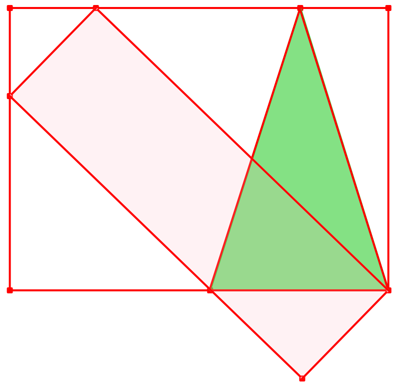


angleACB=45º
angleADB=60º
Siga AB=x
els triangles ABC, ADB són semblants
(a+b)/x=x/a
(a+b)a=x^2

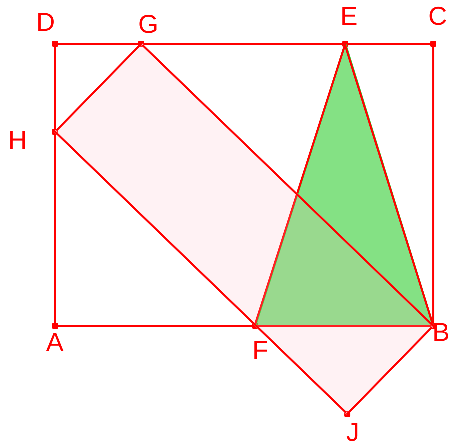
Teorema sinus ABC
(a+b)/x=sin60º/sin 45º=sqrt(3/2)
$(a+b)^2$=(3/2)x^2

(a+b)/a=3/2
a/b=2

4026.- Domat un rectangle s'ha dibuixat un triangle isòsceles i un altre rectangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució 1:



AB=a, BC=b
CG=c

BG=sqrt(b²+c²)

BJ=d, BF=e

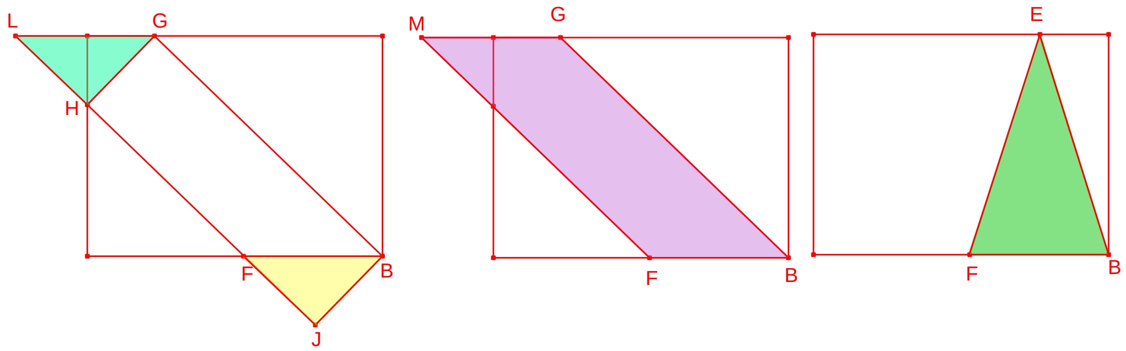
BCG, FJB semblants
d=(a-c)·sqrt(b²+c²)/c
e=(a-c)·sqrt(b²+c²)/(bc)

[FBE]=(a-c)(b²+c²)/(2c)

[BGHJ]=(a-c)(b²+c²)/c

[FBE]/[BGHJ]=1/2

Solució 2:



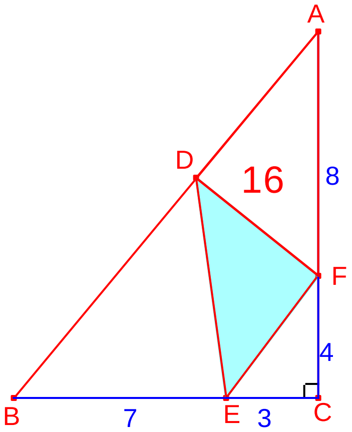
FJB LHG iguals

[JBGH]=[fBGM]=2[FBE]

4027.- La figura està formada per un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$ que té inscrit el triangle $\overset{\Delta}{DEF}$

Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADF}$ és 16, calculeu la proporció:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

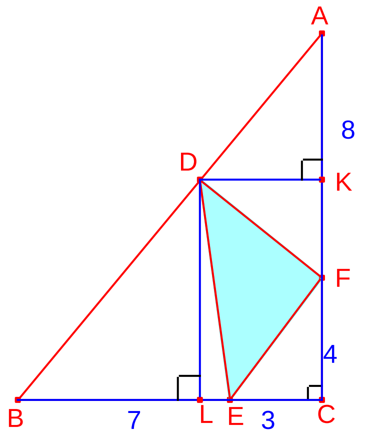
$\overline{AB} = \sqrt{10^2 + 12^2} = 2\sqrt{61}$

Siga K la projecció de D sobre $\overline{AC}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADF}$ és 16:

$\frac{1}{2} 8 \cdot \overline{DK} = 16$

$\overline{DK} = 4$



Siga L la projecció de D sobre $\overline{BC}$

$\overline{CL} = 4, \overline{BL} = 10 - 4 = 6$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BLD}, \overset{\Delta}{BCA}$ són semblants.

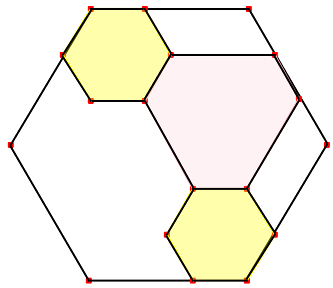
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DB}}{2\sqrt{61}} = \frac{6}{10}$

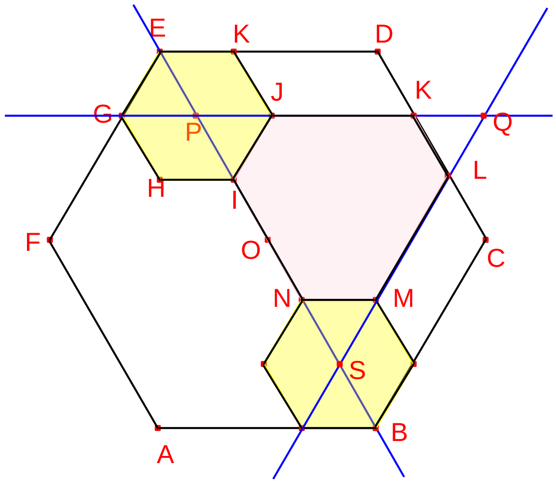
$\overline{DB} = \frac{6}{5}\sqrt{61}, \overline{AD} = 2\sqrt{61} - \frac{6}{5}\sqrt{61} = \frac{4}{5}\sqrt{61}$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{61}}{\frac{6}{5}\sqrt{61}} = \frac{2}{3}$$

4028.- La figura està formada per tres hexàgons regulars (dos iguals ombrejats amb groc) i un hexàgon no regular.
Quina es la proporció mínima de l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon exterior.



Solució:



Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O i costat $\overline{AB} = 1$
Siga l'hexàgon regular $EGHIJK$ de centre P costat $\overline{EG} = a$
Siga l'hexàgon $IJKLMN$
Les rectes IN, LM es tallen en S
Les rectes JK, LM es tallen en Q
El triangle $\overset{\Delta}{PQS}$ és equilàter de costat $\overline{PS} = 2 - 2a$.
$\overline{KL} = 1 - 2a$
L'àrea total ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{EGHIJK} + S_{PQS} - 2S_{PIJ} - S_{KLQ}$$

$$S_{ombrejada} = 2 \cdot 6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(2-2a)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(1-2a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(10a^2 - 4a + 3)$$

L'àrea de l'hexàgon regular exterior és:

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

La proporció d'àrees és:

$$p(a) = \frac{1}{6}(10a^2 - 4a + 3)$$

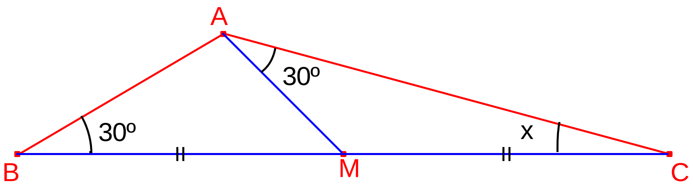
Completant quadrats:

$$p(a) = \frac{1}{6}(10a^2 - 4a + 3) \geq \frac{5}{3}\left(\left(a - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{13}{50}\right)$$

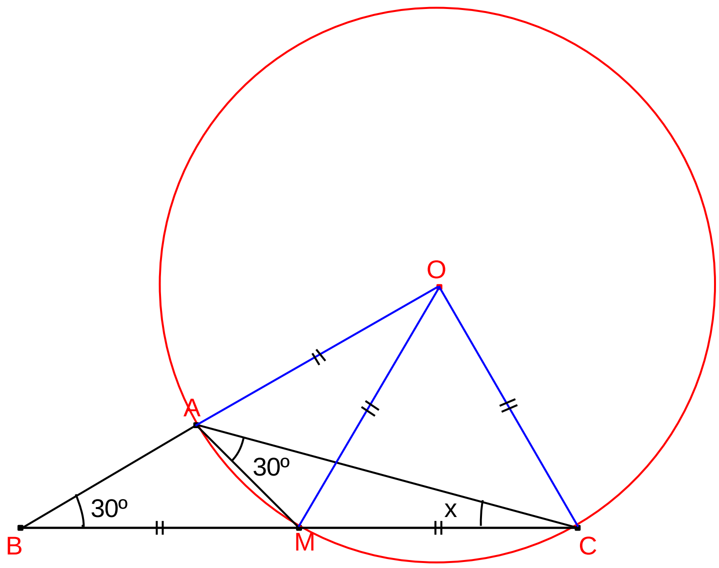
El mínim de la proporció d'àrees s'assoleix quan $a = \frac{1}{5}$ (cinquena part del costat de l'hexàgon exterior)
La proporció mínima és:

$$p_{mín} = \frac{5}{3} \cdot \frac{13}{50} = \frac{13}{30}$$

4029.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 30°, C = x$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$ tal que
$\angle MAC = 30°$
Calculeu la mesura de l'angle x

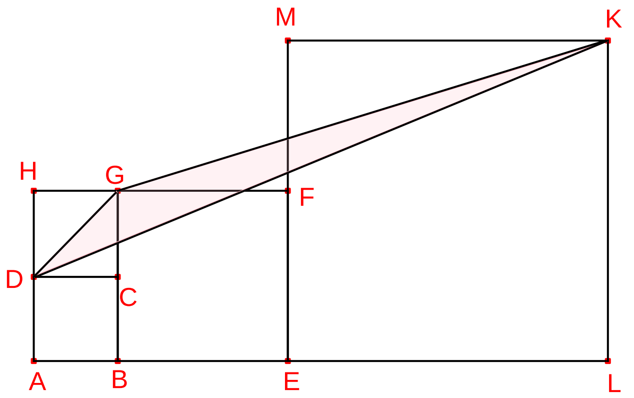


Solució:

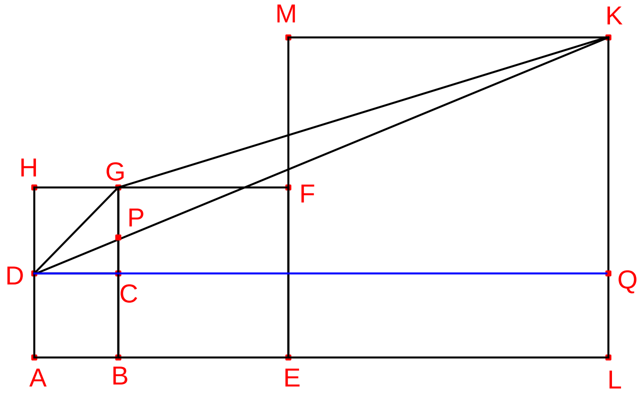


arc capaç MC de 30º
OM=OC=MC
angleBCO=60º
angleBOC=90º
OA=OC
AngleACO=45º
x=60º-45º=15º

4030.- La figura està formada per quatre quadrats $ABCD, DCGH, BEFG, ELKM$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és 20
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DGK}$



Solució:
Siguen els quadrat $ABCD, DCGH$ de costat $\overline{AB} = a, a^2 = 20$
$\overline{BE} = 2a$
Siga el quadrat $ELKM$ de costat $\overline{EL} = c$



El segment $\overline{DK}$ talla el costat $\overline{CG}$ en el punt P
Siga Q la projecció de D sobre $\overline{LK}$
Siga $\overline{PC} = x$
$\overline{DQ} = 3a + c, \overline{QK} = c - a$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCP}, \overset{\Delta}{DQK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{c-a} = \frac{a}{3a+c}$$

$$x = \frac{a(c-a)}{3a+c}$$

$$\overline{PG} = a - x = \frac{4a^2}{3a+c}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DGK}$ és:

$$S_{DGK} = \frac{1}{2}\overline{PG} \cdot \overline{DQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a^2}{3a+c} \cdot (3a+c) = 2a^2 = 40$$