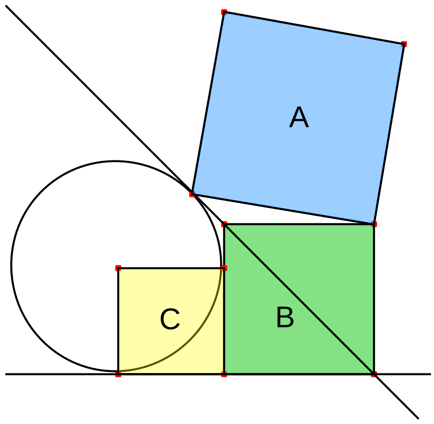
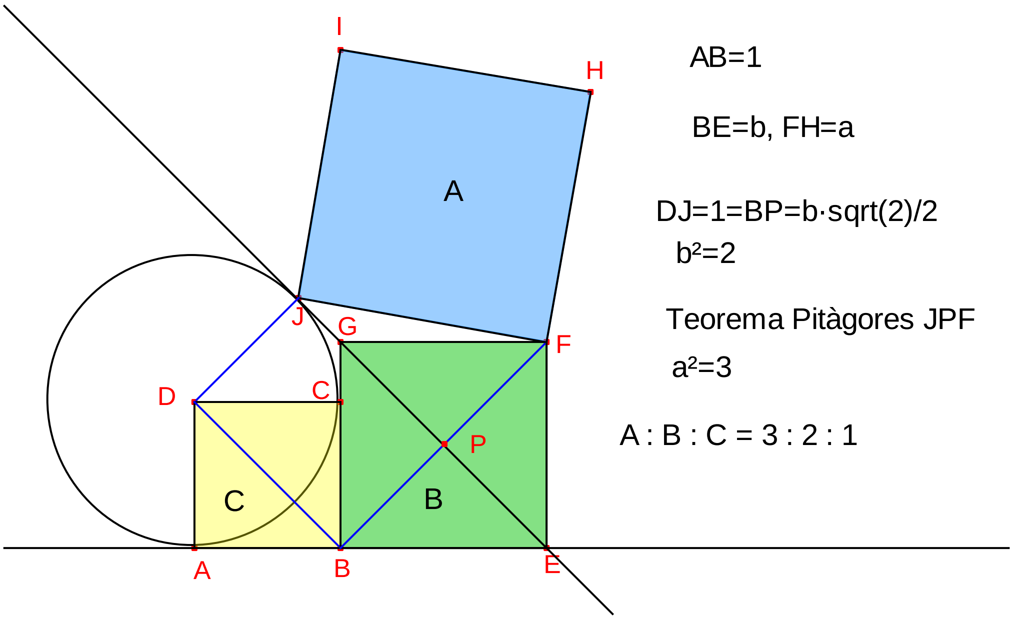
4031.- La figura està formada per tres quadrats d'àrees A, B, C i una circumferència.
Calculeu la proporció d'àrees $A : B : C$



Solució:



AB=1

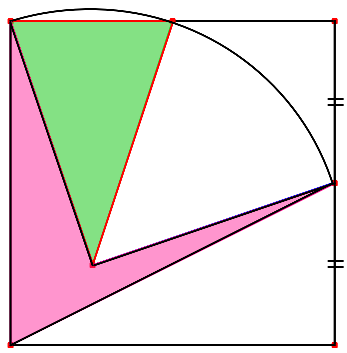
BE=b, FH=a

DJ=1=BP=b·sqrt(2)/2
$b^2=2$

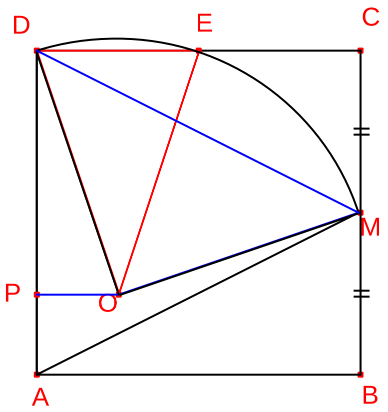
Teorema Pitàgores JPF
$a^2=3$

A : B : C = 3 : 2 : 1

4032.- La figura està formada per un quadrat i un quadrant.
Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea lila.



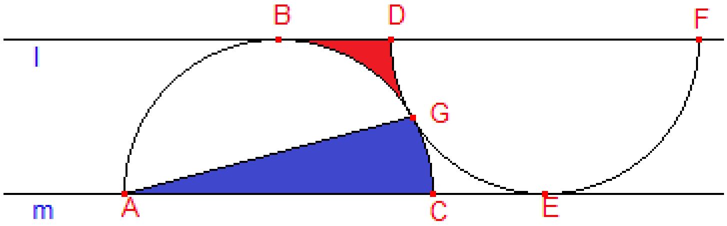
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB}=2$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$
$\overline{DM}=\sqrt{5}$
Siga el quadrant de centre O.
$\overline{OM}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{5}=\frac{\sqrt{10}}{2}$
Siga $\alpha=\angle MDC$
$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$
Siga P la projecció de O sobre el segment $\overline{AD}$
$\angle PDO=45°-\alpha$
$\overline{OP}=\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(45°-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{2}$



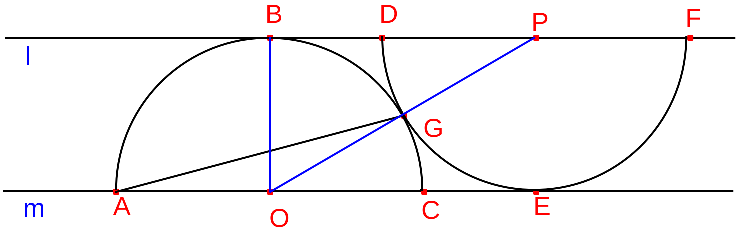
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DPO}$:
$\overline{DP}=\sqrt{\frac{10}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$
L'àrea verda és:
$S_{EOE}=\frac{1}{2}2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{DP}=\frac{3}{4}$
L'àrea lila és:
$S_{AMOD}=S_{AMD}-S_{DOM}=\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{OM}^2=2-\frac{1}{2}\frac{10}{4}=\frac{3}{4}$
Les àrees són iguals.

4033.- En la figura, les rectes l, m són paral·leles, els semicercles ABC, DEF tenen radi 1 i són tangents en G.

a) Calculeu l'àrea roja
b) Calculeu la mesura de l'angle $\angle GAC$
c) Calculeu l'àrea blava.



Solució:



Siguen O, P els centres dels semicercles ABC, DEF

$\overline{OP} = 2, \overline{OB} = 1$

Aleshores, $\angle BPO = \angle PO \cdot = 30°$

$\angle GAC = 15°$

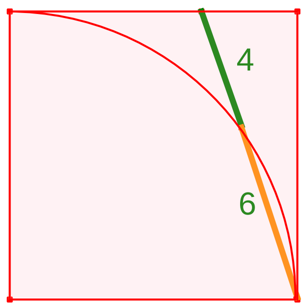
L'àrea roja és igual a la diferència de l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBP}$ i l'àrea d'un quadrant de cercle de radi 1.

$$S_{roja} = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$$

L'àrea blava és igual a la suma de l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOG}$ i l'àrea d'un sector de cercle de radi 1 i 30º.

$$S_{blava} = \frac{1}{2}\sin 150° + \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}$$

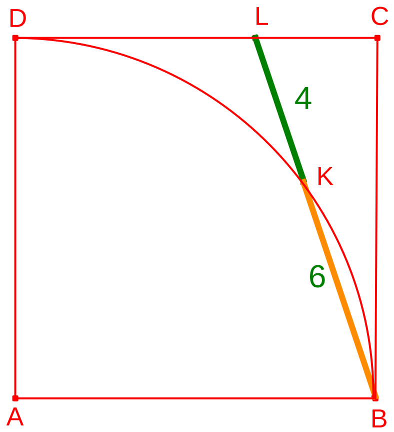
4034.- La figura està formada per un quadrat i un quadrant de circumferència.
Calculeu l'àrea del quadrat.



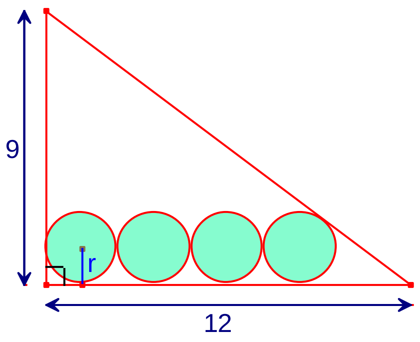
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen $\overline{KL} = 4, \overline{BK} = 6$

aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCL}$:
$\overline{CL} = \sqrt{100 - c^2}$
$\overline{DL} = c - \sqrt{100 - c^2}$

Aplicant la potència del L respecte del quadrant:
$4 \cdot 10 = \left(c - \sqrt{100 - c^2}\right)^2$
Simplificant:
$c^4 - 100c^2 + 900 = 0$
Resolent l'equació:
$S_{ABCD} = c^2 = 90$

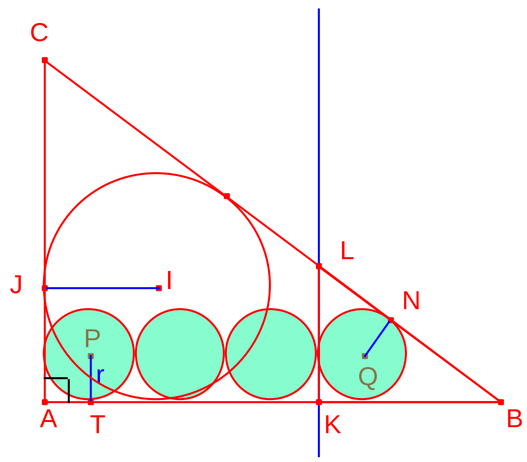


4035.- En un triangle rectangle de catets 9, 12 s'han dibuixat quatre circumferències iguals i tangents.
Calculeu el radi de cadascuna de les circumferències.



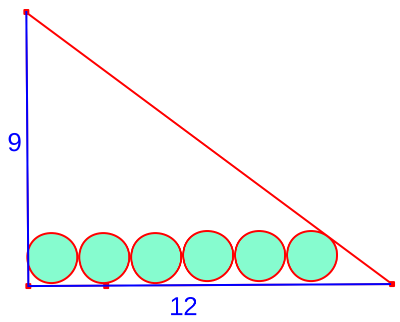
Solució

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AB} = 12, \overline{AC} = 9$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{BC} = 15$
Siga I el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de radi $\overline{IJ} = R$
$$R = \frac{9 + 12 - 15}{2} = 3$$



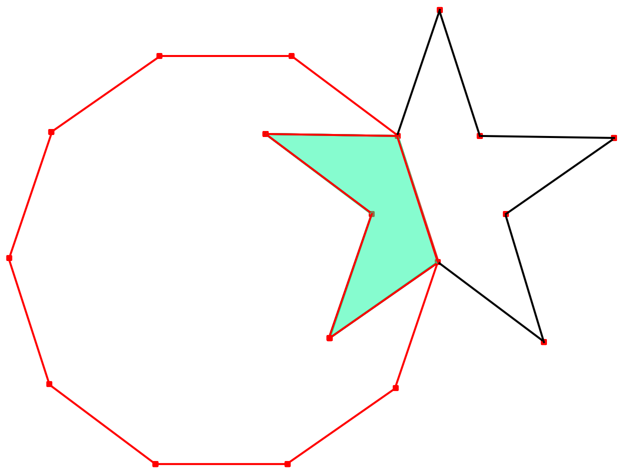
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QN} = r$
$\overline{BK} = 12 - 6r$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KBL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{r}{R} = \frac{12 - 6r}{12}$$
$$r = \frac{6}{5}$$

Generalització:
En un triangle rectangle de catets 9, 12 s'han dibuixat n circumferències iguals i tangents.
Calculeu el radi de cadascuna de les circumferències.

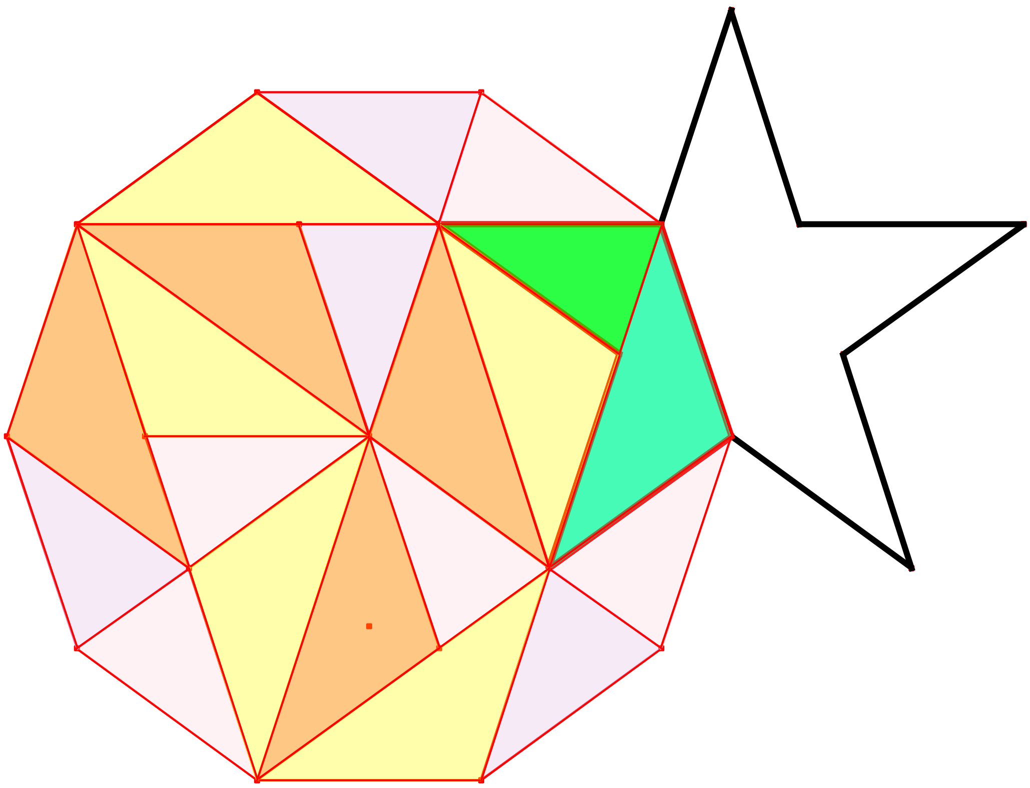


El radi de cadascuna de les circumferències és:
$$r = \frac{6}{n + 1}$$

4036.- La figura està formada per un decàgon regular i un estel del 5 puntes de costats i angles iguals. els dos polígons estan sobreposats.
Si la zona ombrejada (intersecció dels dos polígons) té àrea 12, calculeu l'àrea del decàgon regular

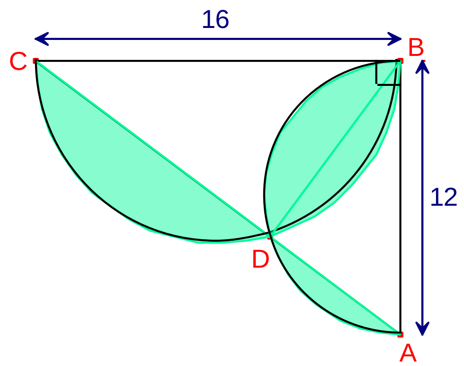


Solució:



[Decàgon]=10·12=120

4037.- Donat el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°, \overline{AB} = 12, \overline{BC} = 16$ sobre els cates s'han dibuixat dues semicircumferències. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



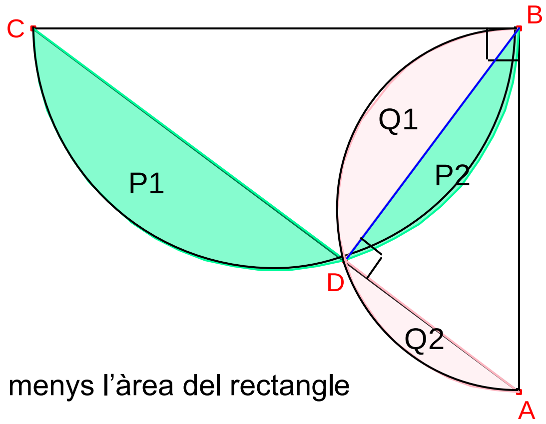
Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADB}, \overset{\Delta}{BDC}$ són semblants i de raó $12 : 16 = 3 : 4$

L'àrea $P_1 = \frac{16}{9} Q_1, P_2 = \frac{16}{9} Q_2$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = \frac{25}{9}(Q_1 + Q_2)$$



$\overline{AD} = 20$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADB}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

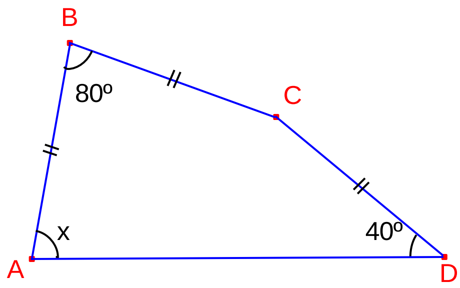
$$\overline{BD} = \frac{48}{5}, \overline{AD} = \frac{36}{5}$$

$Q_1 + Q_2$ és igual la l'àrea del semicercle de diàmetre 12 menys l'àrea del rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$.

$$Q_1 + Q_2 = \frac{1}{2}\pi 6^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{36}{5} = 18\pi - \frac{864}{25}$$

$$S_{ombrejada} = \frac{25}{9}(Q_1 + Q_2) = \frac{25}{9}\left(18\pi - \frac{864}{25}\right) = 50\pi - 96 \approx 61.0796$$

4038.- En el quadrilàter $ABCD$ de la figura $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$,
$B = 80°, D = 40°$
Determineu la mesura de l'angle $A = x$



Solució:

$\angle BAC = \angle BCA = \dfrac{180° - 80°}{2} = 50°$

Siga K la projecció de C sobre $\overline{AD}$

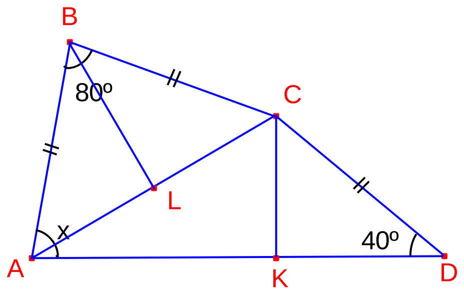
Siga L la projecció de B sobre $\overline{AC}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BLC}, \overset{\Delta}{DKC}$ són iguals

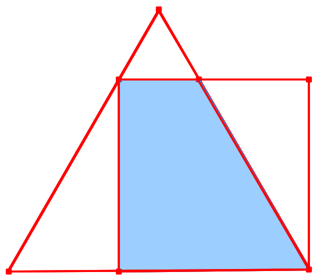
Aleshores, $\overline{AL} = \overline{CL} = \overline{CK}$

Aleshores, $\angle CAK = 30°$

$x = 50° + 30° = 80°$

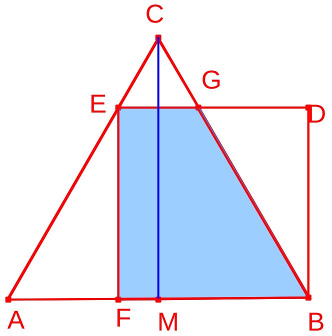


4039.- La figura està formada per un triangle equilàter i un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea comuna del triangle i del quadrat i l'àrea total.



Solució:

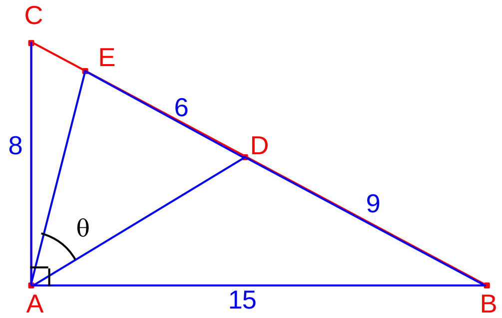
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $BDEF$ de costat $\overline{BD} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
$\overline{AF} = \overline{DG} = 1 - c, \overline{GE} = 2c - 1$



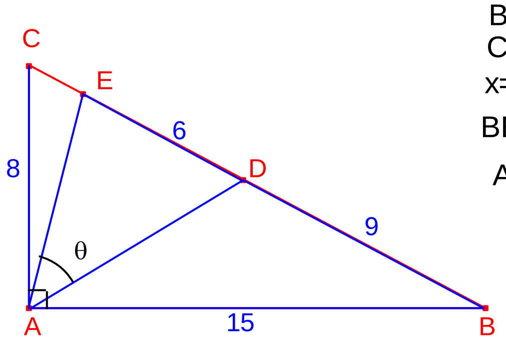
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AFE}, \overset{\Delta}{AMC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c}{1-c} = \sqrt{3}$$
Resolent l'equació:
$$c = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$
$$c^2 = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{BDG} = \frac{1}{2}(1-c)c = \frac{-3+2\sqrt{3}}{4}$$
l'àrea total de la figura és:
$$S_{ABDGC} = S_{ABC} + S_{BDG} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{-3+2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\left(-1+\sqrt{3}\right)}{4}$$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{FBGE} = \frac{c+2c-1}{2}c = \frac{3c^2-c}{2} = \frac{15-8\sqrt{3}}{4}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{FBGE}}{S_{ABDGC}} = \frac{\frac{15-8\sqrt{3}}{4}}{\frac{-3+3\sqrt{3}}{4}} = \frac{-9+7\sqrt{3}}{6} \approx 0.5207$$

4040.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC},\ A = 90°$, $\overline{AB} = 15, \overline{AC} = 8$
Siguen D, E dos punts de la hipotenusa tals que $\overline{BD} = 9, \overline{DE} = 6$
Calculeu la mesura de l'angle $\theta = \angle DAE$



Solució:



BC=17
CE=2
x=angleABC
BE=AB=15
AngleAEB=90º-x/2
CD=CA=8
angleCDA=45º+x/2
AngleEAD=45º