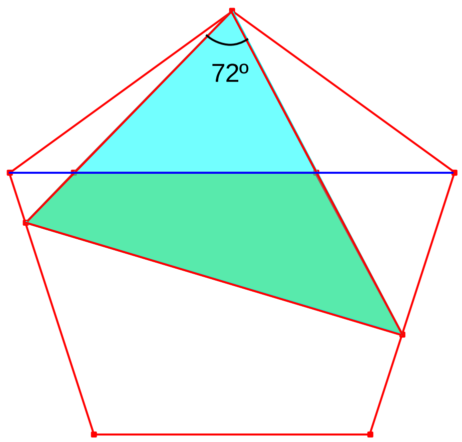
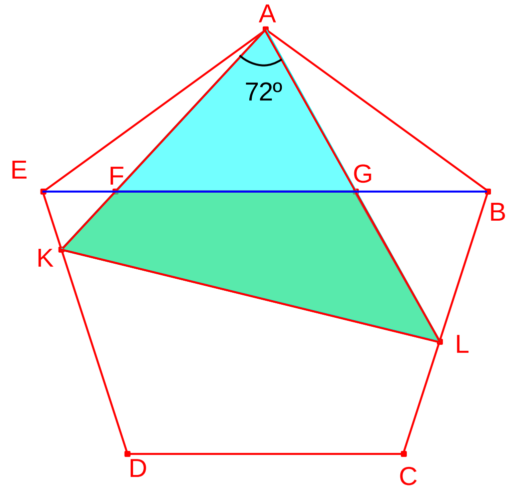
4051.- La figura està formada per un pentàgon regular.
S'ha dibuixat sobre un vèrtex un angle de 72º.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea blava.



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga $\alpha = \angle EAK$
$\angle LAB = 36° - \alpha$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AEK}$

$$\frac{\overline{AK}}{\sin 108°} = \frac{1}{\sin(108° + \alpha)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ALB}$

$$\frac{\overline{AL}}{\sin 108°} = \frac{1}{\sin(144° - \alpha)}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKL}$ és:

$$S_{AKL} = \frac{1}{2}\overline{AK} \cdot \overline{AL} \cdot \sin 72° =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin^2 108°}{\sin(108° + \alpha) \cdot \sin(144° - \alpha)} \cdot \sin 72°$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AEF}$

$$\frac{\overline{AF}}{\sin 36°} = \frac{1}{\sin(36° + \alpha)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AGB}$

$$\frac{\overline{AG}}{\sin 36°} = \frac{1}{\sin(72° - \alpha)}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AFG}$ és:

$$S_{AFG} = \frac{1}{2}\overline{AF} \cdot \overline{AG} \cdot \sin 72° = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 36°}{\sin(36° + \alpha) \cdot \sin(72° - \alpha)} \cdot \sin 72°$$

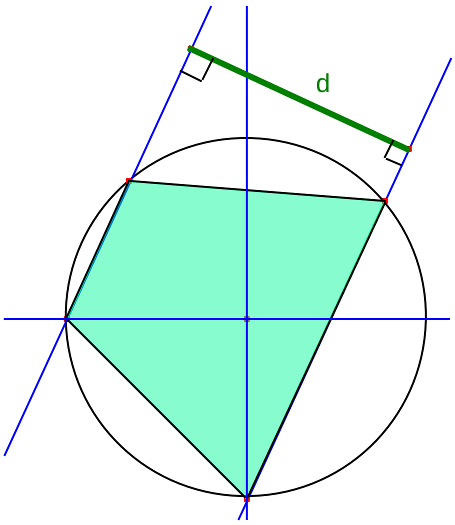
La proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AKL}, \overset{\Delta}{AFG}$ és:

$$\frac{S_{AKL}}{S_{AFG}} = \frac{\dfrac{\sin^2 72°}{\sin(108° + \alpha) \cdot \sin(144° - \alpha)}}{\dfrac{\sin^2 36°}{\sin(36° + \alpha) \cdot \sin(72° - \alpha)}} = \frac{\sin^2 72°}{\sin^2 36°} = 4 \cdot \cos^2 36° = 1 + \Phi$$

La proporció entre les àrees del polígon $KLGF$ i del triangle $\overset{\Delta}{AFG}$ és:

$$\frac{S_{KLFG}}{S_{AFG}} = \frac{S_{AKL} - S_{AFG}}{S_{AFG}} = \Phi$$

4052.- Una circumferència amb el seu centre a l'origen està tallada per dues línies paral·leles a una distància d. Calculeu l'àrea del trapezi verd en termes de la distància d



Solució:

Diga la circumferència de centre O.

Siga el trapezi $ABCD$ de costats paral·lels $\overline{AD} = a, \overline{BC} = b$ inscrit en la circumferència.

$\angle AOB = 90°$

$\angle BDA = \frac{1}{2}\angle AOB = 45°$

Siga K la projecció de B sobre $\overline{AD}$

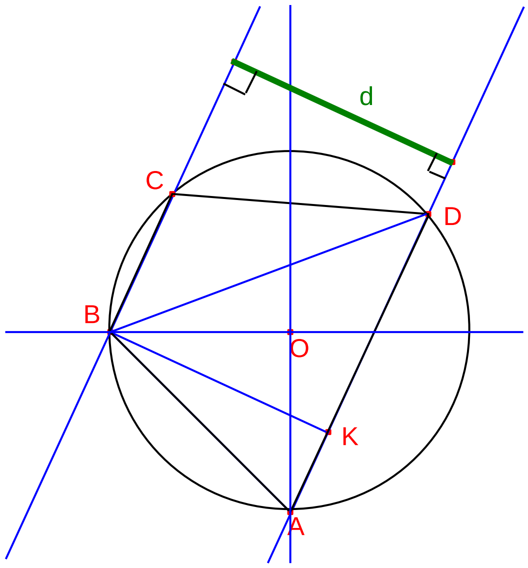
$\overline{DK} = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$

$\overline{BK} = d$

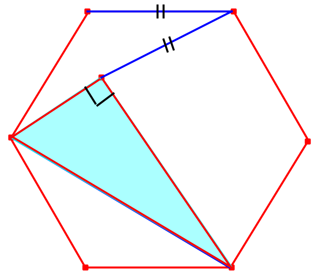
$d = \frac{a+b}{2}$

L'àrea del trapezi és:

$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}d = d^2$



4053.- La figura està formada per un hexàgon regular i un triangle rectangle sobre una diagonal. Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle rectangle i l'àrea de l'hexàgon.

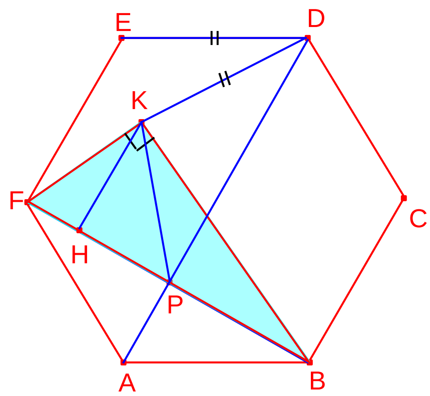


Solució:

Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKF}, K = 90°, \overline{DK} = \overline{DE} = 1$

Siga P el punt mig de la diagonal $\overline{BF}$



$$\overline{FP} = \overline{KP} = \frac{1}{2}\overline{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AF} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{DP} = \overline{AD} - \overline{AP} = \frac{3}{2}$$

Siga H la projecció de K sobre $\overline{BF}$.

Siga $\alpha = \angle KPD = \angle HKP$

aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PKD}$:

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\overline{KH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

L'àrea del triangle ombrejat és:

$$S_{FKD} = \frac{1}{2}\overline{BF} \cdot \overline{KH} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

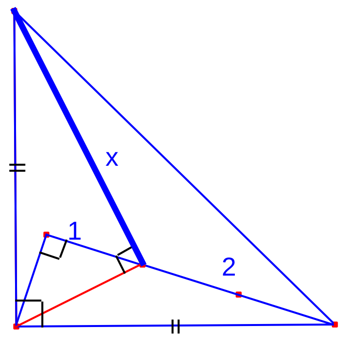
L'àrea de l'hexàgon regular $ABCDEF$ és:

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

la proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{FKD}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{9}$$

4054.- Sobre els catets d’un triangle rectangle isòsceles s’han dibuixat dos triangles rectangles. Calculeu la mesura del segment x



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de catets $\overline{AB} = \overline{AC} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$

$\overline{AD} = \sqrt{c^2 - 9}$

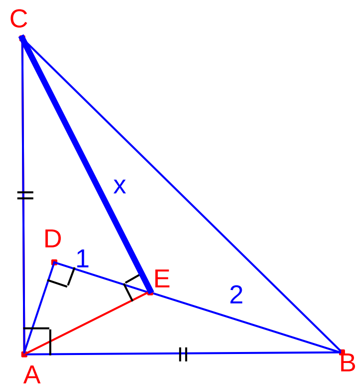
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$

$\overline{AE} = \sqrt{c^2 - 8}$

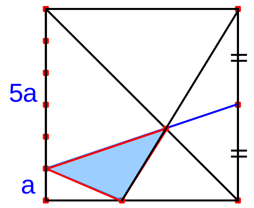
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEC}$

$x^2 = c^2 - (c^2 - 8) = 8$

$x = 2\sqrt{2}$



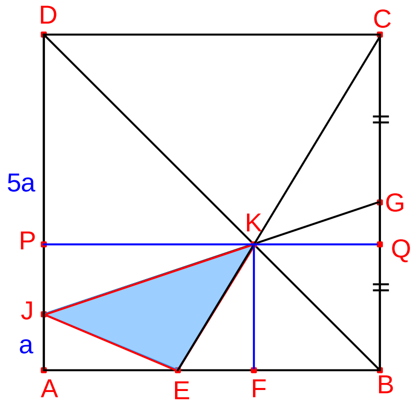
4055.- Un costat d'un quadrat s'ha dividit en dues parts que estan en raó $1:5$
El costat oposat s'ha dividit en dos parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB}=6$
$\overline{AJ}=1, \overline{DJ}=5, \overline{BG}=3$
Els triangles $\overset{\Delta}{DJK}, \overset{\Delta}{BGK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{KQ}}{6-\overline{KQ}}=\frac{3}{5}$$

$$\overline{KQ}=\overline{KF}=\frac{9}{4}$$



Els triangles $\overset{\Delta}{EBC}, \overset{\Delta}{KQC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BC}}{\frac{9}{4}}=\frac{6}{6-\frac{9}{4}}$$

$$\overline{BE}=\frac{18}{5}$$

$$\overline{AF}=\frac{15}{4}, \overline{AE}=\frac{12}{5}, \overline{JP}=\frac{5}{4}, \overline{EF}=\frac{27}{20}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{JKE}$ és:

$$S_{JKE}=S_{AFKP}-\left(S_{AJE}+S_{EFK}+S_{JPK}\right)=\frac{15}{4}\cdot\frac{9}{4}-\left(\frac{1}{2}\frac{12}{5}\cdot 1+\frac{1}{2}\frac{27}{20}\cdot\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\frac{15}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)=\frac{27}{8}$$

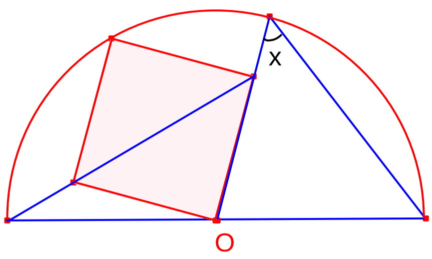
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:

$$S_{ABCD}=6^2=36$$

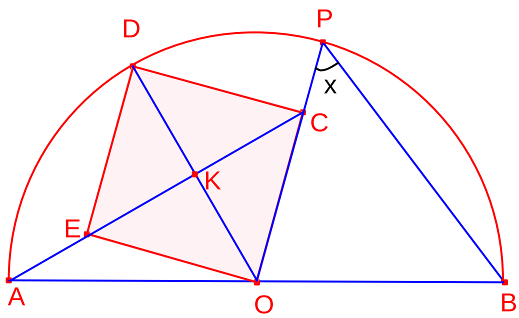
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{JKE}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{27}{8}}{36}=\frac{3}{32}$$

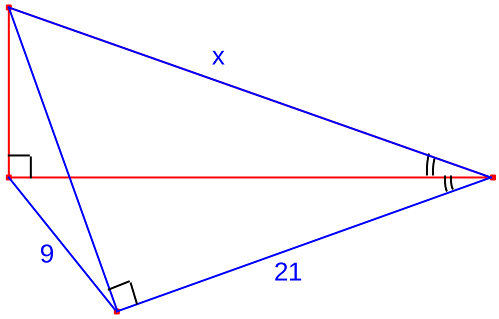
4056.- La figura està formada per una semicircumferència, un quadrat amb un vèrtex en el centre de la semicircumferència.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el quadrat $OCDE$ de diagonal $\overline{OK} = R$ i centre K
$\overline{OK} = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}\overline{OA}$
Aleshores, $\angle CAB = 30°$
$\angle OBP = x$
$\angle AOP = 2x, \angle ACO = 45°$
$\angle CAB = 135° - 2x$
$135° - 2x = 30°$
$x = \frac{1}{2}105°$



4057.- En la figura, calculeu la mesura del segment x



Solució:

Siga $\alpha = \angle ABC = \angle ABD$

Siga $\overline{AD} = 9, \overline{BD} = 21$

$\angle EAD = \alpha$

$\overline{AD}$ és mitjana sobre la hipotenusa del triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$.

Aleshores, $\overline{AC} = \overline{AE} = 9$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ABE}$ són iguals.

$\overline{ED} = x - 21$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DCE}$ són semblants.

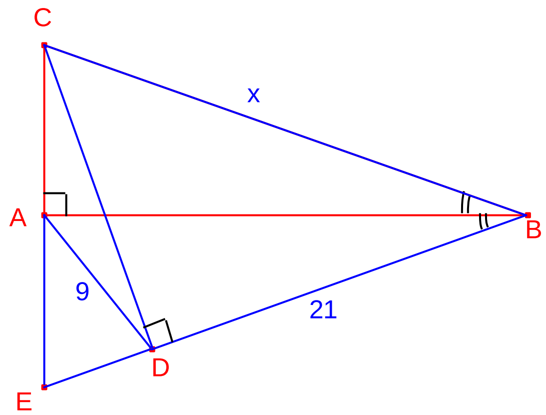
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{18} = \frac{9}{x - 21}$$

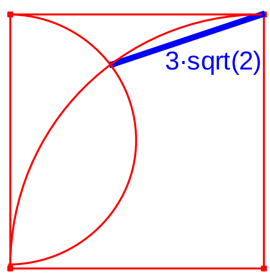
$$x^2 - 21x - 162 = 0$$

Resolent l’equació:

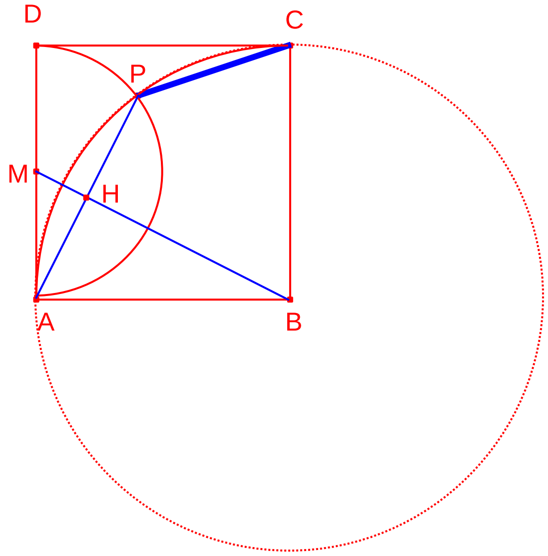
$$x = 27$$



4058.- La figura està formada per un quadrat, un semicercle i un quadrant.
El segment assenyalat mesura $3\sqrt{2}$.
Calculeu l'àrea del quadrat.

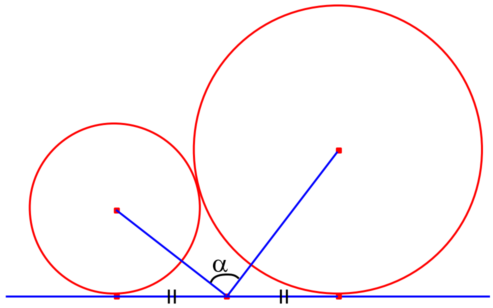


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2a$
Siga M el lpunt mig del semicercle.
Siga P la intersecció del quadrant i del semicercle,
$\overline{CP} = 3\sqrt{2}$
$\angle APC = 135°$
Siga H la intersecció dels segments $\overline{BM}, \overline{AP}$
H és el punt mig del segment $\overline{AP}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MAB}$
$\overline{BM} = a\sqrt{5}$

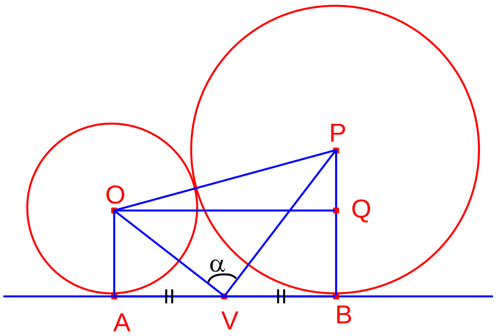


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MAB}, \overset{\Delta}{HAB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{AH}}{a} = \frac{2a}{c\sqrt{5}}$$
$$\overline{AH} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a, \overline{AP} = \frac{4\sqrt{5}}{5}a$$
$$\overline{AC} = 2\sqrt{2}a$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APC}$:
$$8a^2 = \frac{16}{5}a^2 + 18 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5}c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
Simplificant:
$$4a^2 - 4\sqrt{5}a - 15 = 0$$
Resolent l'equació:
$$a = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$$S_{ABCD} = 4a^2 = 45$$

4059.- Siguen dues circumferències tangents i tangents a una recta.
Determineu l'angle α que formen els dos centres i el punt mig, com vèrtex, del segment de tangència.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = r$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PB} = R$
Siga Q la projecció de O sobre $\overline{PB}$
$\overline{OP} = R + r, \overline{PQ} = R - r$



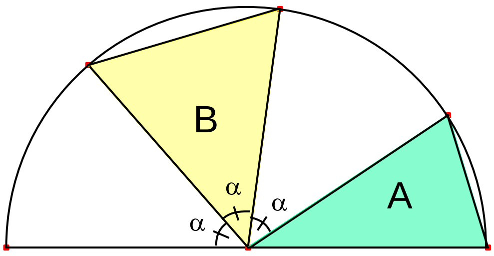
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQP}$:
$\overline{OQ} = 2\sqrt{Rr}$

Siga V el punt mig del segment de tangència $\overline{AB}$
$\overline{AV} = \overline{BV} = \sqrt{Rr}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAV}$:
$\overline{OV}^2 = r^2 + Rr$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBV}$:
$\overline{PV}^2 = R^2 + Rr$
$\overline{OV}^2 + \overline{PV}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr = (R + r)^2 = \overline{OP}^2$
Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores:
El triangle $\overset{\Delta}{OVP}$ és rectangle, $\alpha = \angle OVP = 90°$

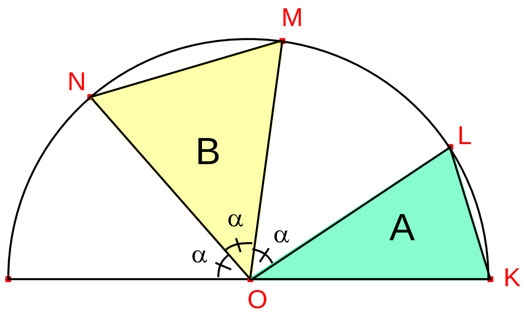
4060.- La figura està formada per un semicercle i dos triangles.
Calculeu:
$\lim_{\alpha \to 0} \frac{A}{B}$



Solució:
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OK} = 1$

$A = S_{OKL} = \frac{1}{2} \cdot \sin 3\alpha$

$B = S_{OMN} = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha$



Aplicant la regla de l'Hôpital:

$\lim_{\alpha \to 0} \frac{A}{B} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{3 \cdot \cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 3$