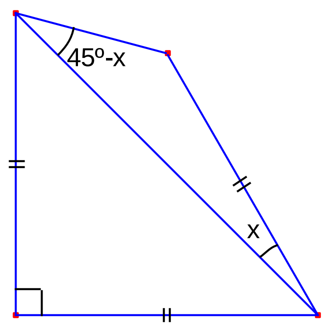
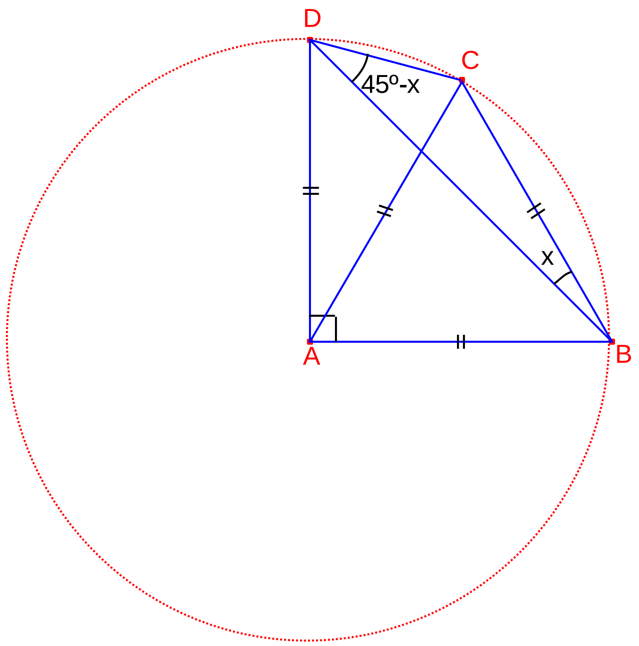
4061.- En la figura, calculeu la mesura de l'angle x

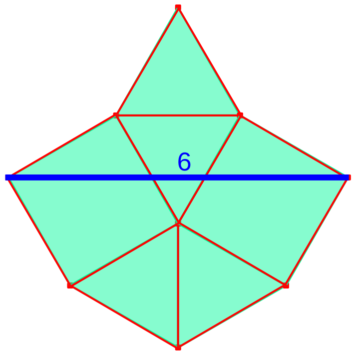


Solució:

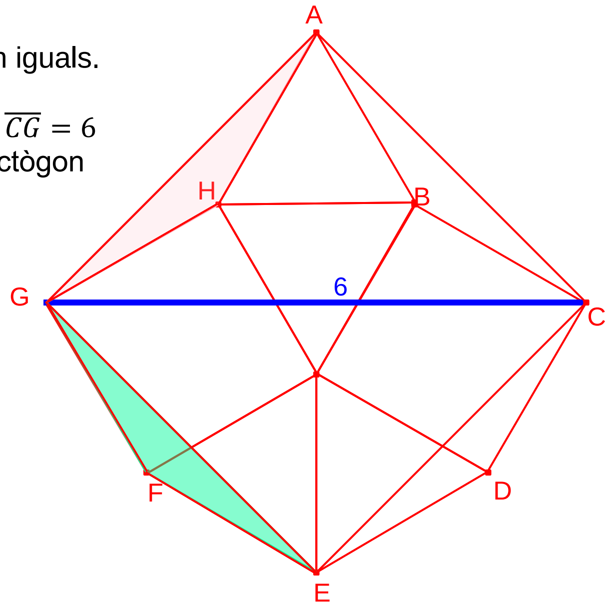


Siga el quadrilàter $ABCD$, $\angle BAD = 90°, \angle CBD = x, \angle BDC = 45° - x$
Aleshores, $\angle BCD = 135°$
D pertany a la circumferència de centre A que passa per B.
$\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC}$
El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.
$\angle DAC = 90° - 60° = 30°$
Per ser $\angle CBD = x$ inscrit en la circumferència:
$x = \frac{1}{2}\angle DAC = 15°$

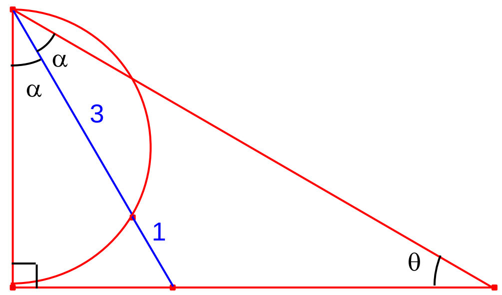
4062.- La figura està formada per dos quadrats i quatre triangles equilàters i un segment de longitud 6.
Calculeu l'àrea de la figura.



Solució:
$\angle AHG = 150°, \angle GFE = 150°$
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{GHA}, \overset{\Delta}{EFG}, \overset{\Delta}{EBC}, \overset{\Delta}{CDE}$ són iguals.
$\angle GAH = 15°, \angle GAC = 90°$
El quadrilàter $ACEG$ és un quadrat de diagonal $\overline{CG} = 6$
L'àrea del quadra $ACEG$ és igual a l'àrea de l'octògon $ABCDEFGH$
L'àrea de l'octògon és:
$S_{ABCDEFGH} = S_{ACEG} = \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 18$

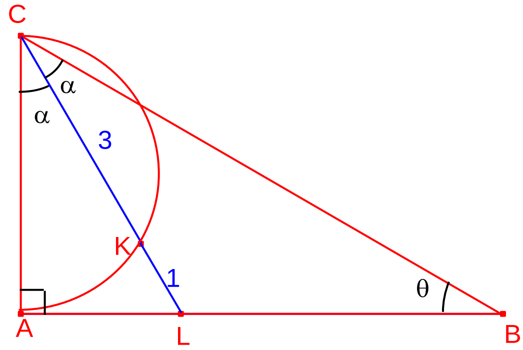


4063.- La figura està formada per un triangle rectangle un semicercle sobre un catet i la bisectriu de l'angle agut.
Calculeu la mesura de l'angle θ

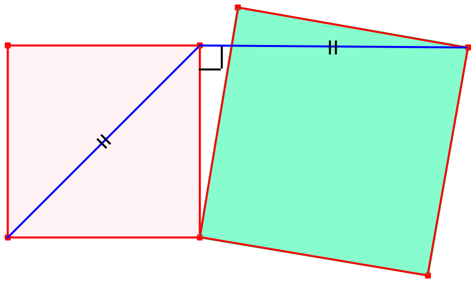


Solució:

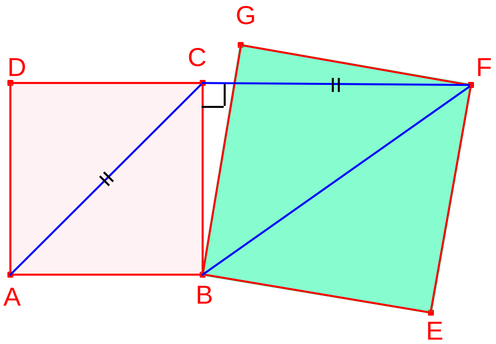
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga la bisectriu $\overline{CL}, \overline{CK} = 3, \overline{KL} = 1$
Aplicant la potència de L respecte de la circumferència de diàmetre $\overline{AC}$ és:
$1 \cdot 4 = \overline{AL}^2$
$\overline{AL} = 2$
$\sin \alpha = \frac{1}{2}, \alpha = 30°$
$\theta = 30°$



4064.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea dels dos quadrats.



Solució:

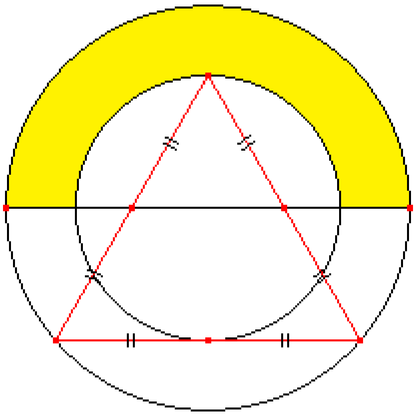


AB=a, BE=b
AC=CF
$CF^2=2a^2$·

$BF=b\cdot sqrt(2)$
$CF^2=2b^2-a^2$
$2a^2=2b^2-a^2$

$[ABCD]/[BEFG]=a^2/b^2=2/3$

4065.- La figura està formada per dues circumferències i un triangle equilàter. Calculeu la proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea total de la figura.

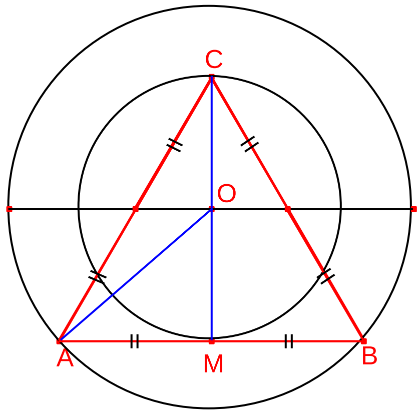


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $c = \overline{AB}$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$



El centre O de les circumferències concèntriques és el punt mig del segment $\overline{CM}$.

Siga $\overline{OM} = r$ radi de la circumferència interior.

Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència exterior.

$$r = \frac{4}{\sqrt{3}}c$$

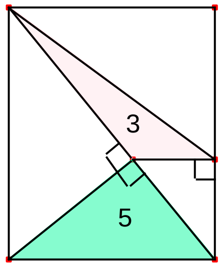
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$$R^2 = \frac{c^2}{4} + r^2 = \frac{7}{3}r^2$$

La proporció d'àrees és:

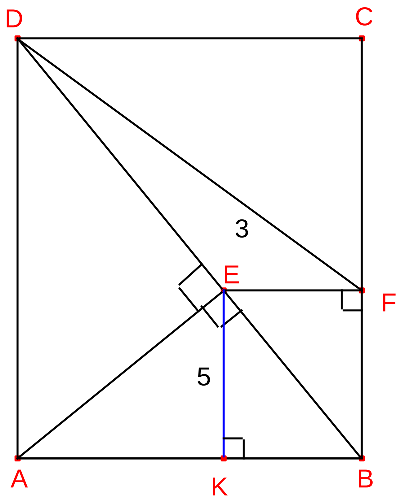
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{\frac{1}{2}(R^2 - r^2)}{R^2} = \frac{2}{7}$$

4066.- Calculeu l'àrea del rectangle de la figura.

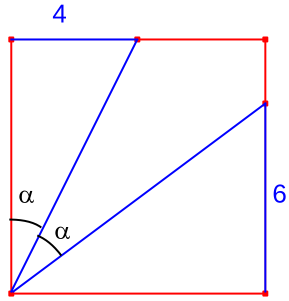


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a, \overline{AD} = b$
Siga K la projecció de E sobre el costat $\overline{AB}$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEB}$ és 5, aleshores:
$\overline{KE} = \frac{10}{a}$

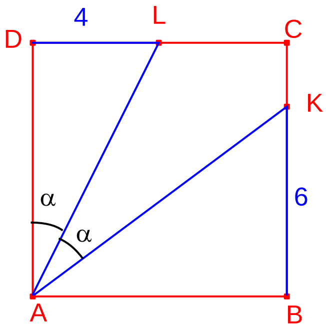
Siga $\overline{EF} = \overline{BK} = x$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAB}, \overset{\Delta}{EKB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$x = \frac{10}{b}$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFD}$ és 3, aleshores:
$\left(b - \frac{10}{a}\right)\frac{10}{b} = 6$
Simplificant:
$S_{ABCD} = ab = 25$



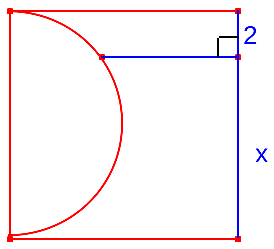
4067.- Determineu l'àrea del quadrats de la figura.



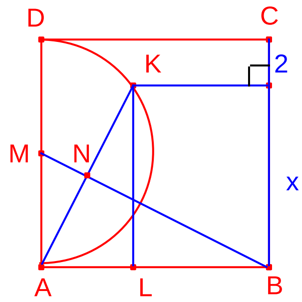
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga $\alpha = \angle DAL = \angle LAK$
Siga $\overline{CK} = x$
$\overline{AB} = 6 + x$
$\angle AKB = 2\alpha$
$\tan\alpha = \dfrac{4}{6+x}$
$\tan 2\alpha = \dfrac{6+x}{6} = \dfrac{2\cdot\dfrac{4}{6+x}}{1-\dfrac{16}{(6+x)^2}}$
Simplificant:
$x^2 + 12x - 28 = 0$
Resolent l'equació:
$x = 2$
L'àrea del quadrat és:
$S_{ABCD} = (6+x)^2 = 8^2 = 64$



4068.- La figura està formada per un quadrat i un semicercle.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{BC} = 2 + x$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$



$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{5}}{2}(2 + x)$$

La intersecció dels segments $\overline{AK}, \overline{BM}$ és el punt mig del segment $\overline{AK}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ANB}, \overset{\Delta}{MAB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AN}}{2 + x} = \frac{\frac{1}{2}(2 + x)}{\frac{\sqrt{5}}{2}(2 + x)}$$

$$\overline{AN} = \frac{\sqrt{5}}{5}(2 + x)$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ALK}, \overset{\Delta}{MAB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{2 + x} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}(2 + x)}{\frac{\sqrt{5}}{2}(2 + x)}$$

Simplificant:

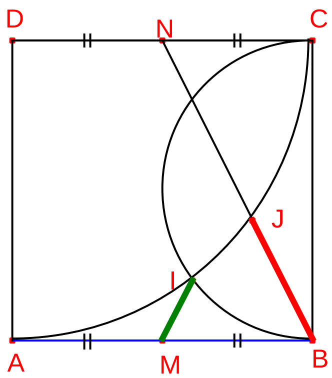
$$x = \frac{4}{5}(2 + x)$$

Resolent l’equació:

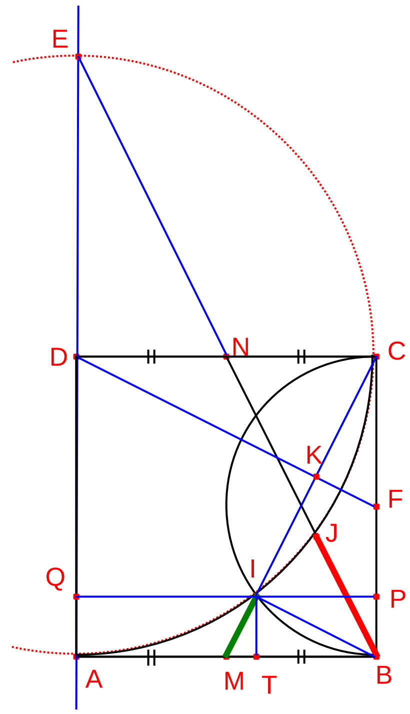
$$x = 8$$

4069.- La figura està formada per el quadrat $ABCD$ un semicercle sobre un quadrat i un quadrant.
M, N són els punts migs dels costat $\overline{AB}, \overline{CD}$
Proveu que els punts M, I, C estan alineats.
Calculeu

$$\frac{\overline{BJ}}{\overline{MI}}$$



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Els segments $\overline{DF}, \overline{CI}$ són perpendiculars i la intersecció és K el punt mig del segment $\overline{CI}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCF}, \overset{\Delta}{CKF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{CK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{CI} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCF}, \overset{\Delta}{CPI}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{CP} = \frac{8}{5}, \overline{IP} = \frac{4}{5}$$

$$\overline{PB} = \overline{IT} = \frac{2}{5}$$

$$\overline{MT} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MTI}, \overset{\Delta}{MBC}$ són semblants.
Aleshores, els punts M, I, C estan alineats.

$$\overline{MI} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BN} = \sqrt{5}$$

$$\overline{BE} = 2\sqrt{5}$$

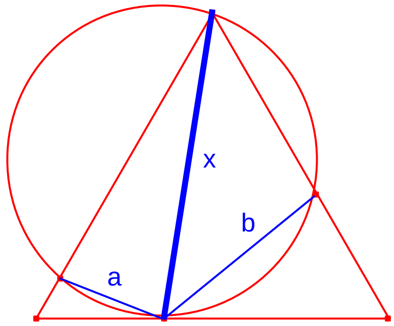
Aplicant la potència de B respecte de la circumferència:

$$\overline{BJ} \cdot 2\sqrt{5} = 2^2$$

$$\overline{BJ} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\overline{BJ}}{\overline{MI}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2$$

4070.- La figura està formada per un triangle equilàter i una circumferència que passa per un vèrtex i és tangent al costat oposat.
Calculeu la mesura del segment x en funció dels segments a, b



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $\overline{AD} = m$
Per ser angles semiinscrit i inscrit i abraçar el mateix arc:
$\angle ADE = \angle ACD$
Els triangles $\overset{\Delta}{AED}, \overset{\Delta}{ADC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{a}{x} = \frac{m}{c}$$
Anàlogament, els triangles $\overset{\Delta}{BFD}, \overset{\Delta}{BDC}$ són semblants
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{b}{x} = \frac{c-m}{c}$$
Sumant ambdues expressions:
$$\frac{a+b}{x} = 1$$
$$x = a + b$$