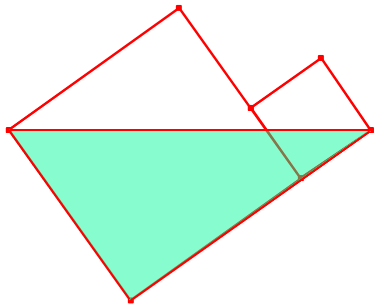
4071.- Dos quadrats de mida variable de la figura comparteixen un vèrtex i un costat.
Calculeu la proporció màxima de l'àrea ombrejada.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = ka$
L'àrea ombrejada és:

$$S_{AED} = \frac{(1+k)a^2}{2}$$

L'àrea total és:

$$S_{AEFGCD} = (1+k^2)a^2$$

La proporció d'àrees és:

$$f(k) = \frac{1+k}{2(1+k^2)}, \qquad k \geq 0$$

$$f'(k) = \frac{-2k^2 - 4k + 2}{4(1+k^2)^2}$$

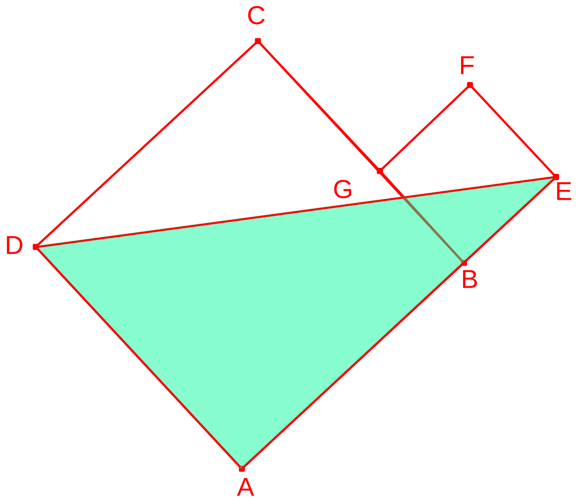
$$f'(k) = 0$$

$$k = \sqrt{2} - 1$$

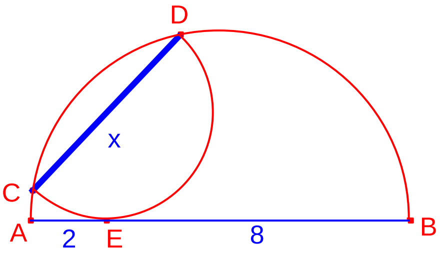
$$f"\left(\sqrt{2}-1\right) < 0$$

la proporció màxima s'assoleix quan $k = \sqrt{2} - 1$
La proporció màxima és:

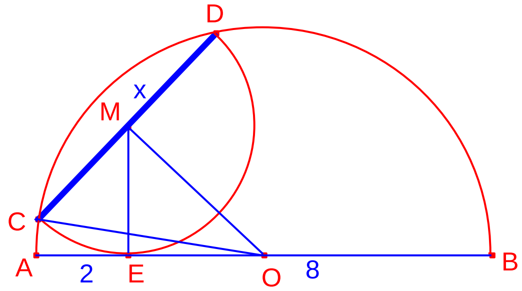
$$f\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \approx 0.6036$$



4072.- La figura està formada per dues semicircumferències.
La menuda és tangent al diàmetre de la gran i els extrems del diàmetre són punts de la semicircumferència gran.
Calculeu la mesura x del diàmetre.



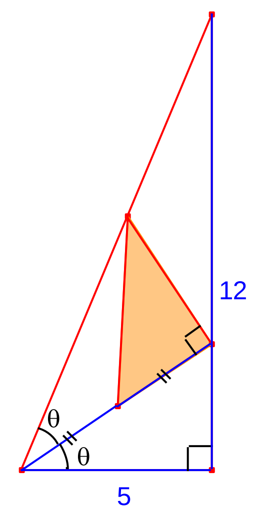
Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 5$
Siga la semicircumferència de centre M i radi $\overline{MC} = \overline{EM} = \frac{1}{2}x$
$\overline{OE} = 3$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MEO}$:
$$\overline{OM}^2 = \frac{1}{4}x^2 + 9$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMO}$:

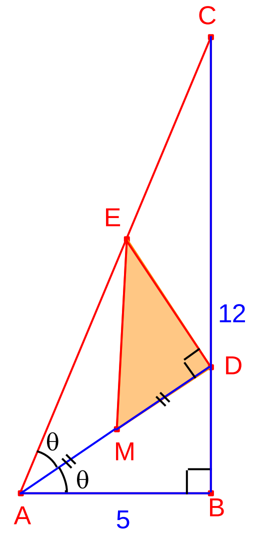
$$25 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 9$$
$$x^2 = 32$$
$$x = 4\sqrt{2}$$

4073.- Donat el triangle rectangle de catets 5, 5 i la diagonal del angle agut major.
Calculeu l'àrea del triangle rectangle ombrejat.

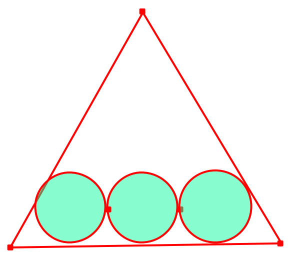


Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°, \overline{AB} = 5, \overline{BC} = 12$
Aplicant-li el teorema de Pitàgores:
$\overline{AC} = 13$
Siga $a = \overline{BD}$
Aplicant la propietat de la bisectriu:
$\frac{a}{5} = \frac{12 - a}{13}$
Resolent l'equació:
$a = \frac{10}{3}$
$S_{ABD} = \frac{1}{2} 5 \cdot \frac{10}{3} = \frac{25}{3}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$
$\overline{AD} = \frac{5\sqrt{13}}{3}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{ADE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$S_{ADE} = \left(\frac{\frac{5\sqrt{13}}{3}}{5}\right)^2 \cdot S_{ABD} = \frac{13}{9} \cdot \frac{25}{3}$
$S_{MDE} = \frac{1}{2} S_{ADE} = \frac{1}{2} \frac{13}{9} \cdot \frac{25}{3} = \frac{325}{54}$



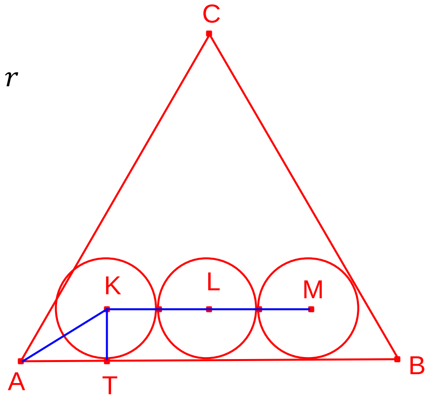
4074.- La figura està formada per un triangle equilàter de costat 1 i tres circumferències tangents a un costat i la primera i l'última tangents cadascuna a la vegada a l'altre dos costat.
Calculeu el radi de les circumferències.
Generalitzeu el problema per a n circumferències.



Solució:

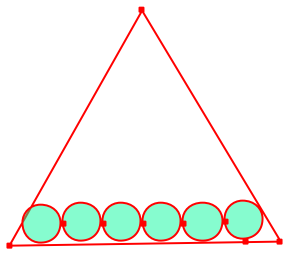
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siguen les circumferències de centres K, L, M de radi $\overline{KT} = r$
$\overline{AK}$ és la bisectriu de l'angle $\angle BAC$
$\overline{KM} = 2r(3-1) = 4r$
$\overline{AK} = 2r, \overline{AT} = r\sqrt{3}$
$1 = \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AT} + \overline{KM} = 2r\sqrt{3} + 4r$

$$r = \frac{1}{2(2+\sqrt{3})}$$

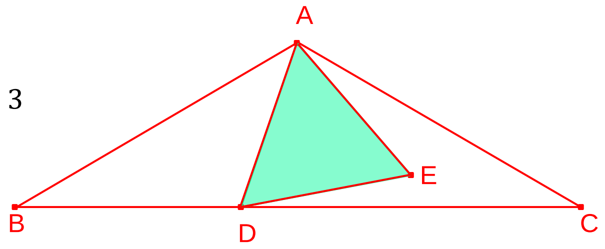


Generalització:

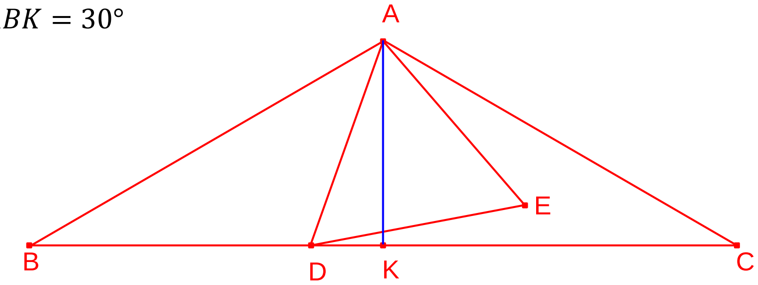
$$r = \frac{1}{2(n-1+\sqrt{3})}$$



4075.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, A = 120°$, d'àrea 50.
Siga D un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD} : \overline{CD} = 2 : 3$
Calculeu l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADE}$



Solució:
Siga $\overline{BD} = 2a, \overline{CD} = 3a$
Siga $\overline{AK} = h$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \angle ABK = 30°$



$\overline{BK} = \frac{5}{2}a, \overline{DK} = \frac{1}{2}a$

$\frac{h}{\frac{5}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 50

$\frac{1}{2}5ah = 50$

$h = \frac{5\sqrt{3}}{6}a$

$\frac{1}{2}5\frac{5\sqrt{3}}{6}a^2 = 50$

$a^2 = 8\sqrt{3}, h^2 = \frac{25}{12}a^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKA}$:

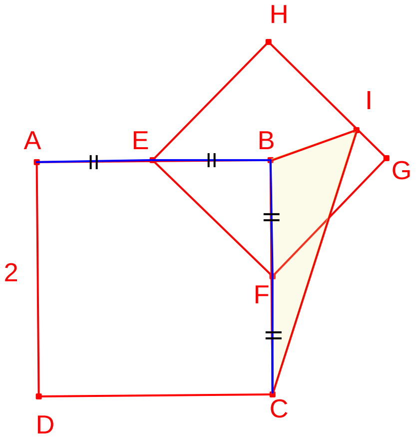
$\overline{AD}^2 = \frac{1}{4}a^2 + h^2 = \frac{7}{3}a^2 = \frac{56\sqrt{3}}{3}$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADE}$ és:

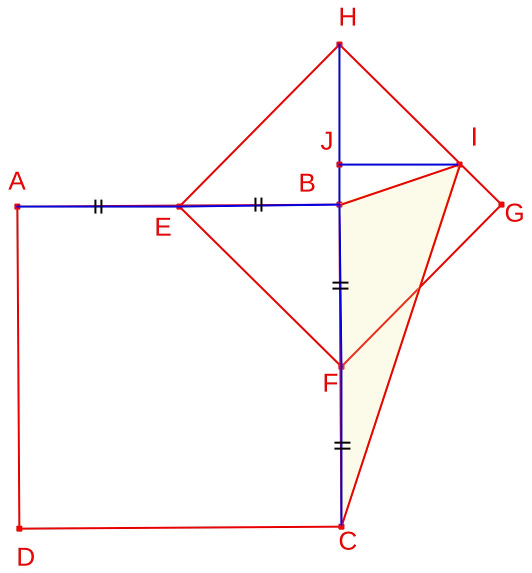
$S_{ADE} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AD}^2 = 14$

4076.- La figura està formada per dos quadrats $ABCD$ de costat $\overline{AD} = 2$ i $EFGH$ on E, F són els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{BC}$, respectivament.

Si $\overline{GH} = 4 \cdot \overline{GI}$, calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCI}$



Solució:



AB=2

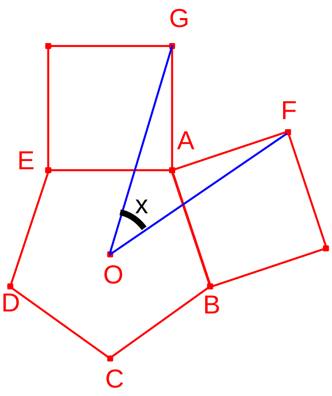
EG=2

BG=1

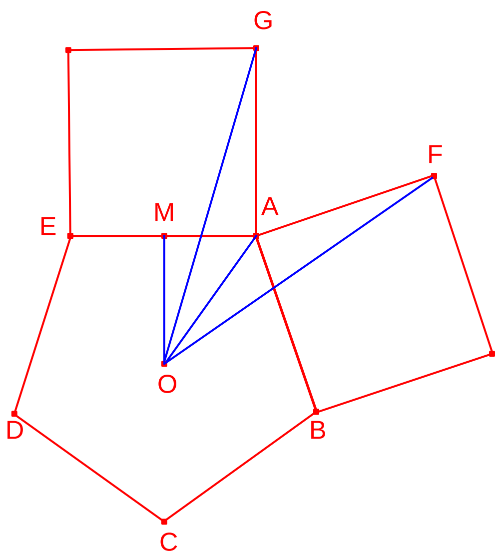
JI=(3/4)BG=3/4

[CBI]=(1/2)·2·(3/4)=3/4

4077.- La figura està formada per un pentàgon regular $ABCDE$ de centre O i dos quadrats sobre dos costats consecutius del pentàgon.
Calculeu la mesura de l'angle $x = \angle FOG$



Solució:



AB=AG=1

angleGOA=y

OA=1/(2·sin 36º)

Teorema dels sinus OAG

1/sin y = a/sin(144º+y)

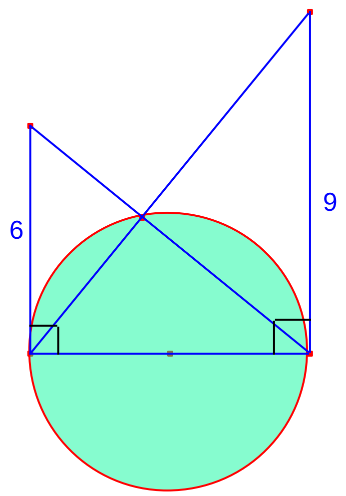
sin y = 2sin 36º · sin(144+y)

sin y = cos(108º+y)+cos y

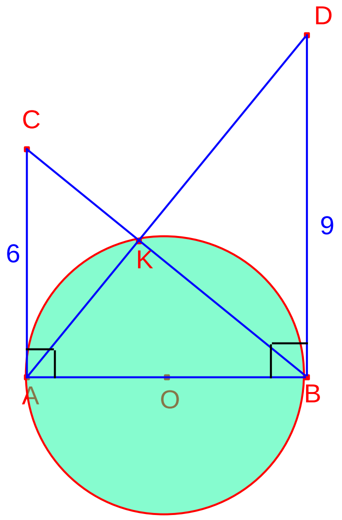
y=19.50202639

x = 2y = 39.00405277

4078.- La figura està formada per un cercle i dos segments tangents al cercle i perpendiculars al diàmetre.
Calculeu l'àrea del cercle.



Solució:



angleAKB=90º

AB=2r, AK=a, BK=b

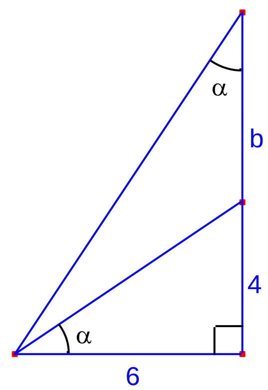
Els triangles AKB, CAB, ABD són semblants

6/(2r)=a/b, 9(2r)=b/a

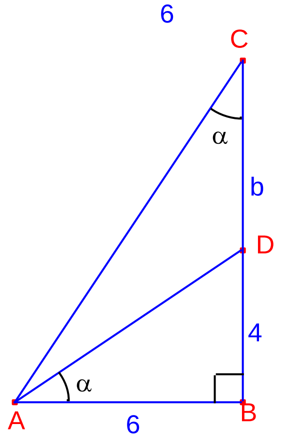
r^2=27/2

S=27/2·Pi

4079.- En la figura calculeu la mesura del segment b

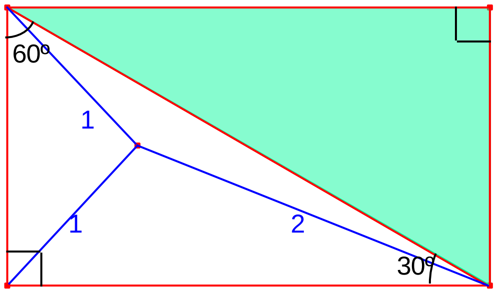


Solució:

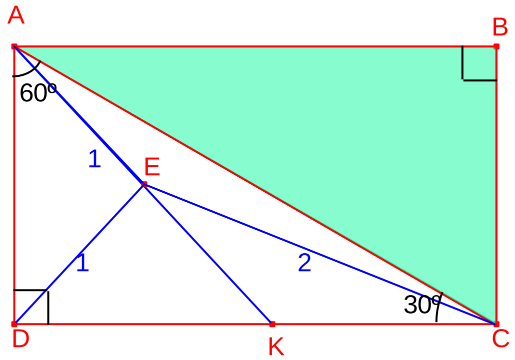


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DBA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{b+4}{6}=\frac{6}{4}$$
Resolent l'equació:
$b=5$

4080.- En la figura, calculeu l'àrea del triangle rectangle ombrejat.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga $\overline{AD} = a, \overline{AC} = 2, \overline{AB} = a\sqrt{3}$
Siga $\alpha = \angle DAE$
La recta AE talla el costat $\overline{DC}$ en el punt K.
$\angle ADE = \alpha, \angle EDK = \angle EKD = 90° - \alpha$
Aleshores, $\overline{EK} = 1$



$\overline{CE} = 2$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{AKC}$
$\overline{DK} = \sqrt{4 - a^2}, \overline{CK} = a\sqrt{3} - \sqrt{4 - a^2}$
La mitjana del triangle acompleix:
$$\overline{CE}^2 = \frac{2\overline{AC}^2 + 2\overline{CK}^2 - \overline{AK}^2}{4}$$
$$4 = \frac{8a^2 + 2\left(a\sqrt{3} - \sqrt{4 - a^2}\right)^2 - 4}{4}$$
Simplificant:
$$3 - 3a^2 = -\sqrt{3}a\sqrt{4 - a^2}$$
$$4a^2 - 10a^2 + 3 = 0$$
$$a^2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{4}$$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3} + \sqrt{39}}{8}$$