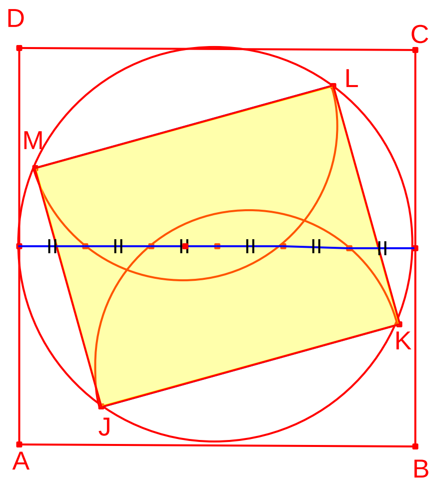
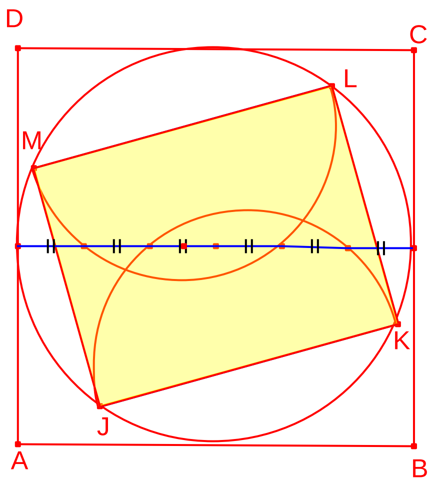
Problemes de Geometria per a l'ESO 409

4081.- La figura està formada per una circumferència inscrita en el quadrat $ABCD$ d'àrea 18, dues semicircumferències i un rectangle $JKLM$.
Calculeu l'àrea del rectangle $JKLM$



Solució:



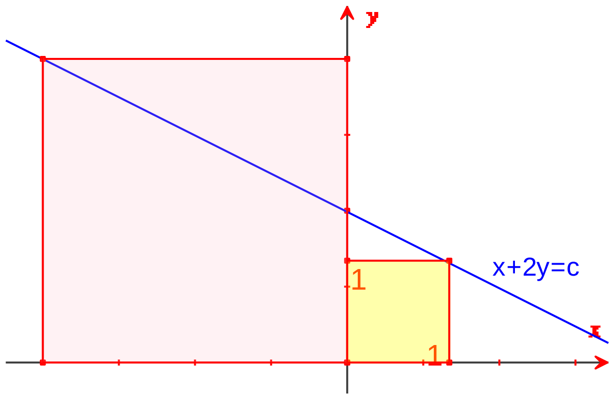
AB=3·sqrt(2)
OE=a, ET=b
ET=r

PQ=(3/2)sqrt(2)
PT=(3/4)sqrt(2)
Teorema Pitàgores ETQ, ETP

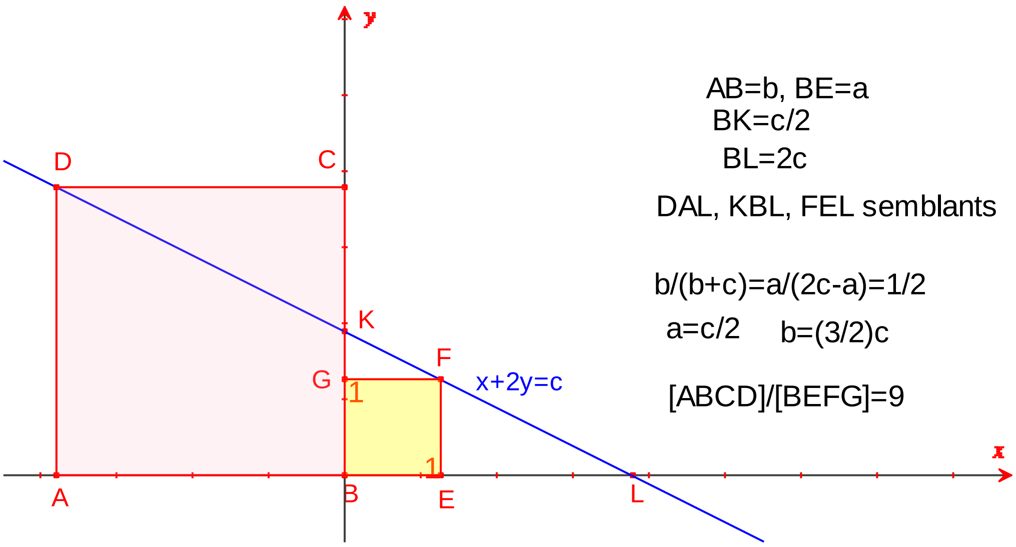
$b^2=r^2-9/8$
$a^2=r^2-5/8$

Teorema Pitàgores MEO
$r^2=11/4$
$a^2=7/4$
[JKLM]=2r·2a=sqrt(77)

4082.- En la figura, dos quadrats comparteixen el vèrtex a l'origen de coordenades i tenen els seus costats al llarg dels eixos coordenats i altres dos vèrtexs es troben en la recta $x + 2y = c$
Calculeu la proporció entre l'àrea raso i la groga.



Solució:



AB=b, BE=a
BK=c/2
BL=2c

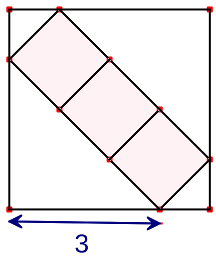
DAL, KBL, FEL semblants

b/(b+c)=a/(2c-a)=1/2

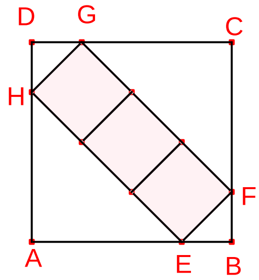
a=c/2 b=(3/2)c

[ABCD]/[BEFG]=9

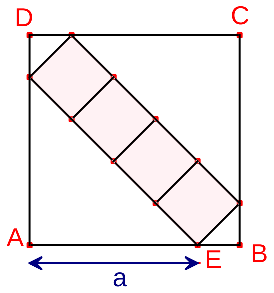
4083.- La figura està formada per un quadrat que conté tres quadrats iguals.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



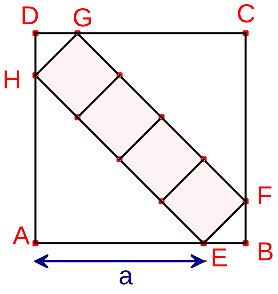
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga $\overline{AE} = 3$
$\overline{HE} = 3\sqrt{2}$
$\overline{EF} = \frac{1}{3}\overline{HE} = \sqrt{2}$
L'àrea del rectangle $EFGH$ és:
$S_{EFGH} = 3 \cdot \overline{EF}^2 = 6$



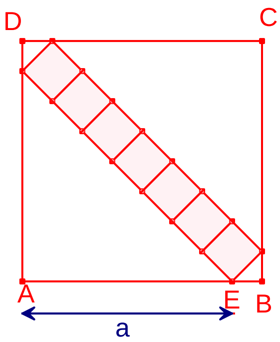
4084.- La figura està formada per un quadrat que conté quatre quadrats iguals.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada en funció de a.
Generalitzeu el problema per a n quadrats interiors iguals.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga $\overline{AE} = a$
$\overline{HE} = a\sqrt{2}$
$\overline{EF} = \frac{1}{4}\overline{HE} = \frac{a}{4}\sqrt{2}$
L'àrea del rectangle $EFGH$ és:
$S_{EFGH} = 4 \cdot \overline{EF}^2 = \frac{1}{2}a^2$

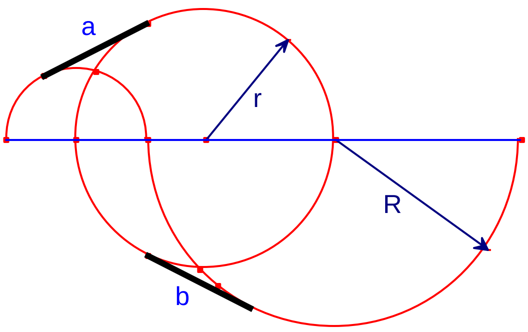


Generalització:
Si el quadrat ABCD conté n quadrats iguals.

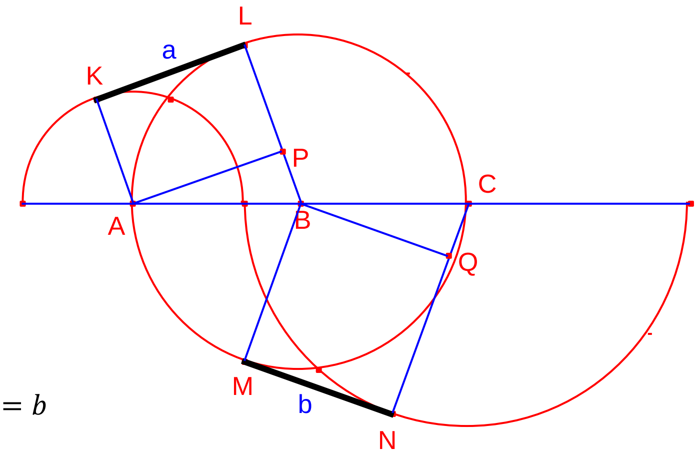


$S_{EFGH} = n \cdot \overline{EF}^2 = \frac{2a^2}{n}$

4085.- La figura està formada per una circumferència de radi r i dues semicircumferències la gran de radi R.
S'han dibuixat dos segments de tangència, a, b.
Calculeu $a + b$



Solució:
Siga la circumferència de centre B i radi $\overline{BA} = r$
Siga la semicircumferència de centre C i radi $\overline{CN} = R$
Siga la semicircumferència de centre A i radi $\overline{AK}$



$s + 2r + R = 2s + 2R$
$s = 2r - R$

Sigen els segments de tangència $\overline{KL} = a, \overline{MN} = b$
Siga P la projecció de A sobre $\overline{BL}$
Siga Q la projecció de B sobre $\overline{CN}$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{APB}, \overset{\Delta}{BQC}$:
$a^2 = r^2 - (r - s)^2 = r^2 - (R - r)^2 = 2Rr - R^2$
$b^2 = r^2 - (R - r)^2 = 2Rr - R^2$
$a + b = 2\sqrt{2Rr - R^2}$

Nota:
$\frac{a + b}{2} = \sqrt{Rs}$
a, b, és mitjana geomètrica del radis dels extrems R, s

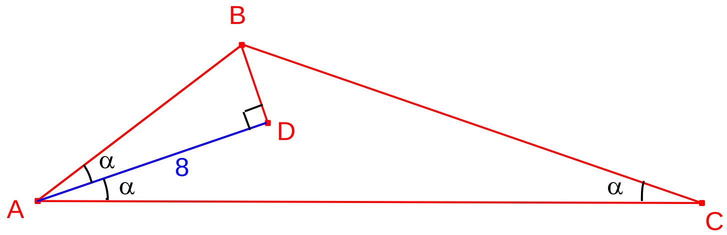
4086.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga D interior al triangle tal que

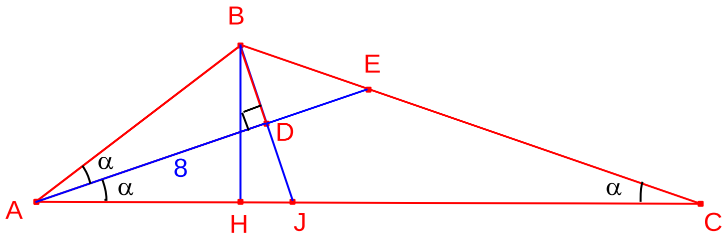
$\overline{AD} = 8, \angle ADB = 90°$.

Siga $\angle BAD = \angle DAC = \angle ACB = \alpha$

Calculeu la mesura del costat $\overline{BC}$



Solució:



Siguen $\overline{BC} = a, \overline{AB} = c$

La recta BD talla el costat $\overline{AC}$ en el punt J

Siga $\overline{BD} = \overline{JD} = x$

Siga H la projecció de B sobre $\overline{AC}$

$\angle HBJ = \alpha$

Siga $\overline{BH} = h$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADB}, \overset{\Delta}{BHJ}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{8} = \frac{2x}{c}$$

$$h = 16\frac{x}{c}$$

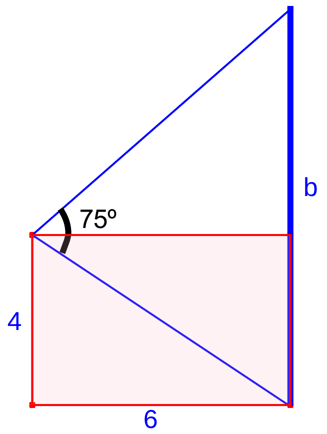
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADB}, \overset{\Delta}{CHB}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

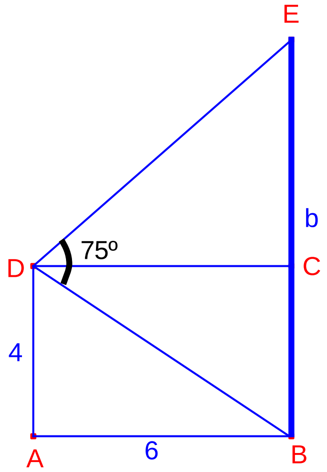
$$\frac{h}{a} = \frac{c}{x}$$

$$a = \frac{c}{x}h = \frac{c}{x} \cdot 16\frac{x}{c} = 16$$

4087.- La figura està formada per un rectangle de costats 6, i 4.
Calculeu la mesura del segment b.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 6, \overline{AD} = 4$
$\overline{CE} = b - 4$



Siga $\alpha = \angle BDC, \beta = \angle EDC = 75° - \alpha$

$$\tan\alpha = \frac{2}{3}, \tan\beta = \frac{b-4}{6}$$

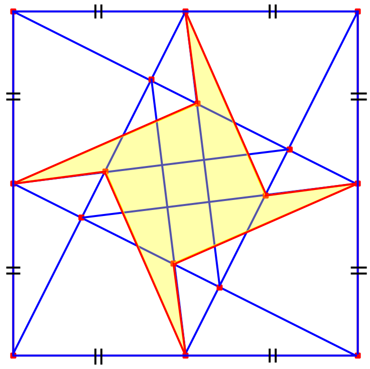
$$\frac{b-4}{6} = \tan(75° - \alpha) = \frac{2 + \sqrt{3} - \frac{2}{3}}{1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\frac{2}{3}} = \frac{10 + 13\sqrt{3}}{37}$$

$$\frac{b-4}{6} = \frac{10 + 13\sqrt{3}}{37}$$

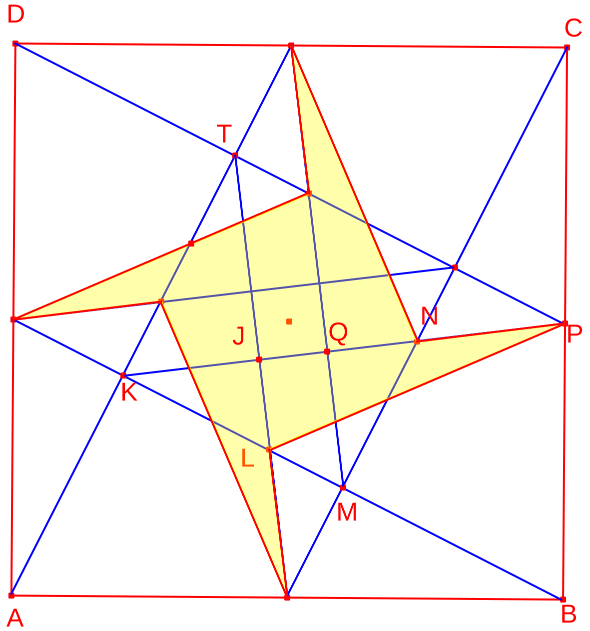
Resolent l'equació

$$b = \frac{208 + 78\sqrt{3}}{37} \approx 9.2730$$

4088.- Calculeu la proporció entre l'àrea del polígon ombrejat i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:



KM=1

AB=sqrt(5)

TK/TP=2/3

MN=KL=2/3

KJ=(2/13)sqrt(13)

JL=QN=(4/39)sqrt(13)

KP=(1/2)sqrt(13)

JP=(9/26)sqrt(13)

KN=(1/3)sqrt(13)

JQ=(1/13)sqrt(13)

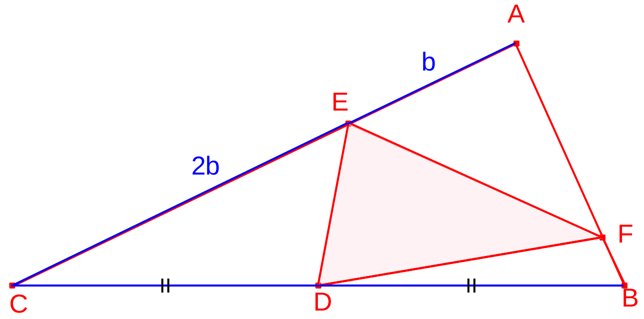
[Groga]=4·[JLP]+JQ²=1

[ABCD]=5

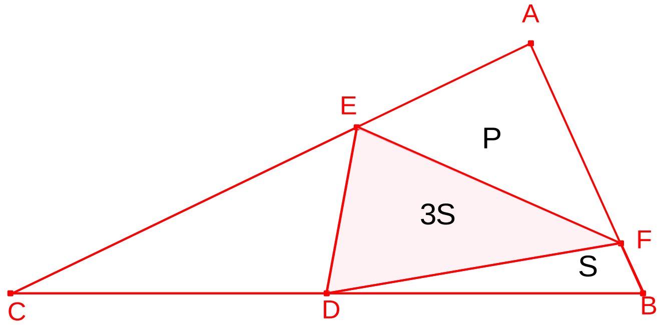
[Groga]/[ABCD]=1/5

4089.- En la figura el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ té àrea 60, $\overline{CE} = 2 \cdot \overline{AE}, \overline{DE} = \overline{BE}$ i ‘àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és el triple de l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{DFB}$.

Calculeu l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$.



Solució:



[ABC]=60

[CDE]=(1/2)(2/3)60=20

P+4S+20=60

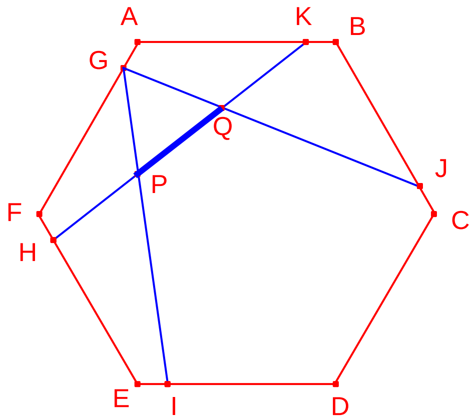
[CPF]=2P

[CDF]=S

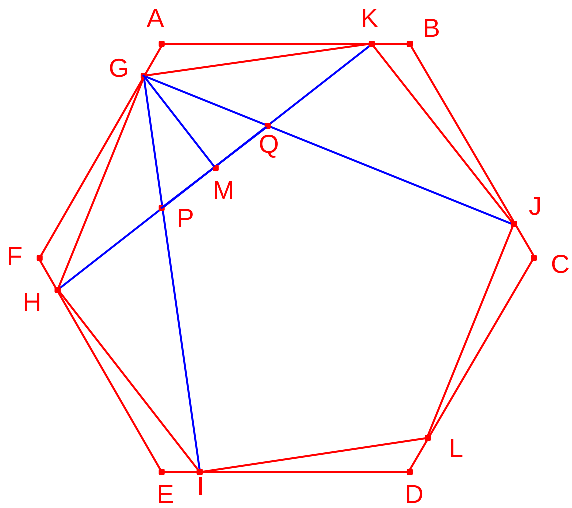
3S+2P=60

[DEF]=3S=18

4090.- Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 13$
Siga $\overline{AG} = \overline{FH} = \overline{EI} = \overline{CJ} = \overline{BK} = 2$
Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$



Solució:



AB=13

KB=2, AK=11

GK²=121+4+2·11·2·(1/2)=147

GK=7·sqrt(3)

HILJKG hexàgon regular

KQ=GQ=PQ

GM=(1/2)GK=(7/2)sqrt(3)
KM=(3/2)7

PQ=(2/3)KM=7