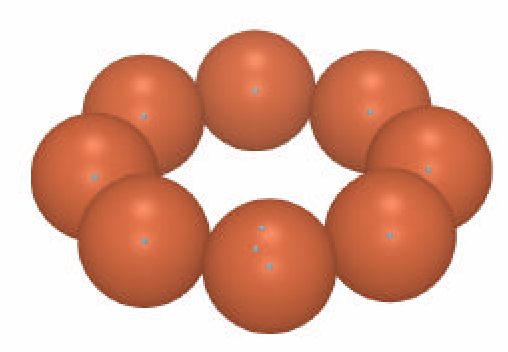
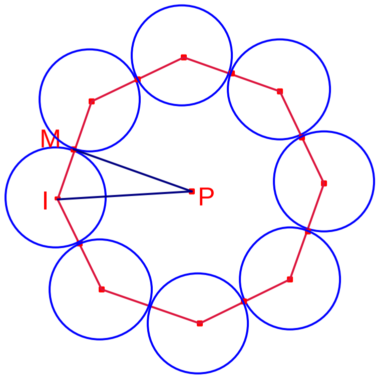
Problemes de Geometria per a l'ESO 41

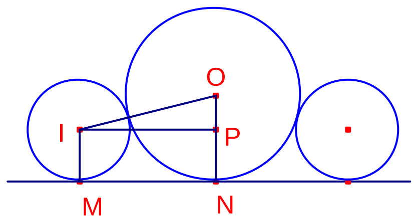
401.- Vuit esferes iguals de radi r i tangents dos a dos reposen sobre un plànol horitzontal i els seus centres formen un octògon regular.
Determineu el radi de l'esfera tangent al plànol horitzontal i tangent a les vuit esferes.
KöMaL, C789.



Solució:



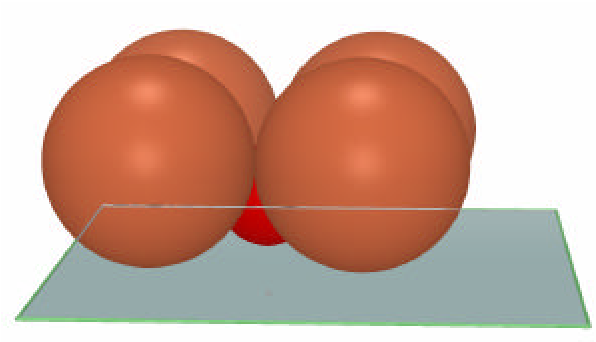
Vista de la secció que passa pels centres de les esferes.



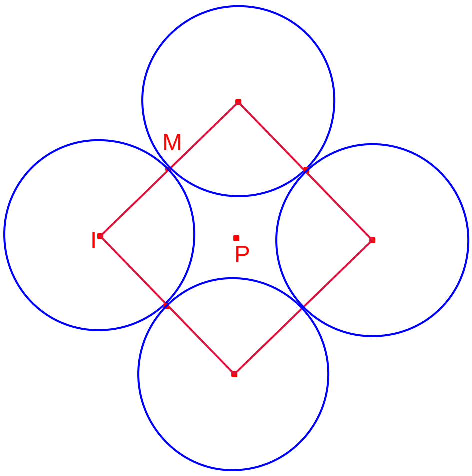
Vista frontal amb una secció de plànol que passa per I i P, perpendicular al plànol horitzontal.

Siga I el centre de una de les esferes de radi r.
Siga M els punt de tangència de dos esferes.
Siga O el centre de l'esfera tangent a les vuit esferes i tangent al plànol horitzontal.
Siga M el punt projecció del punt I sobre el plànol horitzontal.
Siga N la projecció del punt O sobre el plànol horitzontal.
Siga $R=\overline{ON}$.
$\overline{IM}=r$, $\overline{IO}=r+R$, $\overline{OP}=R-r$.
Notem que $\angle IPM=\frac{45^o}{2}$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IPM}$:
$$\overline{IP}=\frac{r}{\sin\frac{45^o}{2}}.$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IPO}$:
$$(R+r)^2=(R-r)^2+\left(\frac{r}{\sin\frac{45^o}{2}}\right)^2.$$
$4Rr=\frac{r^2}{\sin^2\frac{45^o}{2}}$. Aleshores, $R=\frac{2+\sqrt{2}}{2}r$.

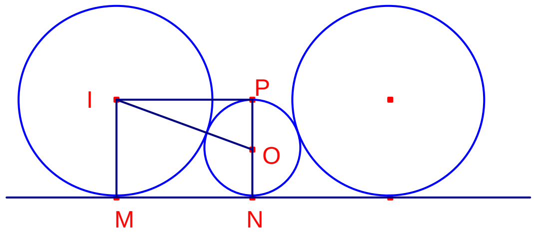
402.- Quatre esferes iguals de radi r i tangents dos a dos reposen sobre un plànol horitzontal i els seus centres formen un quadrat.
Determineu el radi de l'esfera tangent al plànol horitzontal i tangent a les quatre esferes.



Solució:



Vista de la secció que passa pels centres de les esferes.



Vista frontal amb una secció de plànol que passa per I i P, perpendicular al plànol horitzontal.

Siga I el centre de una de les esferes de radi r.
Siga M els punt de tangència de dos esferes.
Siga O el centre de l'esfera tangent a les vuit esferes i tangent al plànol horitzontal.
Siga M el punt projecció del punt I sobre el plànol horitzontal.
Siga N la projecció del punt O sobre el plànol horitzontal.

Siga $s = \overline{ON}$.

$\overline{IM} = r$, $\overline{IO} = r + s$, $\overline{OP} = r - s$.

Notem que $\angle IPM = 45^{\circ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IPM}$:

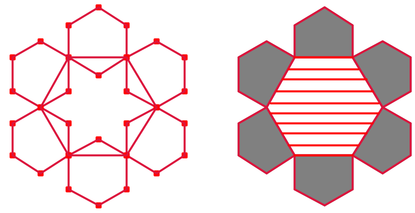
$\overline{IP} = r\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IPO}$:

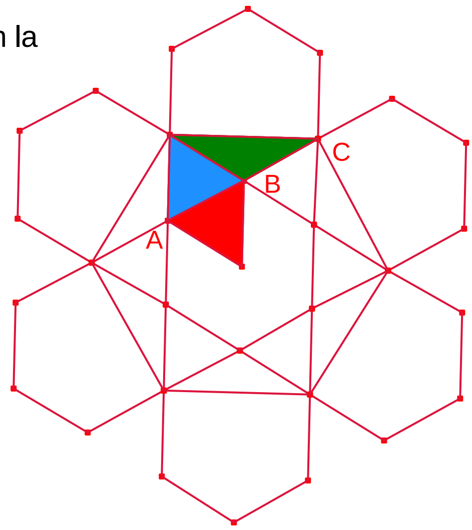
$(r+s)^2 = (r-s)^2 + \left(r\sqrt{2}\right)^2$.

$4rs = 2r^2$. Aleshores, $s = \frac{1}{2}r$.

403.- Per fer un logotip (figura de la dreta) s'ha utilitzat dos tipus diferents d'hexàgons regulars (figura esquerra).
Calculeu la proporció entre l'àrea grisa i la ratllada.
KöMaL, K57.



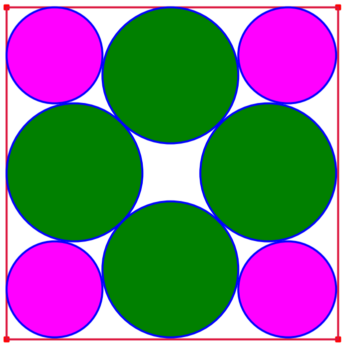
Solució:
Els triangles blau i verd tenen la mateixa àrea ja que tenen la mateixa base $\overline{AB} = \overline{BC}$ i la mateixa altura sobre aquestes bases.
Considerarem aquests triangles com unitat d'àrea de mesura.



L'àrea de l'hexàgon ratllat té 18 triangles d'àrea
Cada pentàgon gris té 5 triangles d'àrea.
L'àrea grisa ocupa 30 triangles d'àrea.
La proporció entre l'àrea grisa i la ratllada és:

$$\frac{30}{18} = \frac{5}{3}.$$

404.- En el quadrat de costat c s'han dibuixat 8 cercles. Determineu el radi dels dos tipus de cercles.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $c=\overline{AB}$.

Siga $r=\overline{PM}=\overline{QN}=\overline{FH}$ el radi dels 4 cercles grans.

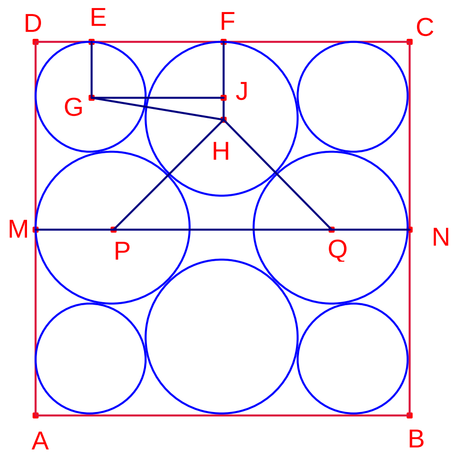
$\overline{HP}=2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{PHQ}$:

$\overline{PQ}=2r\sqrt{2}$.

$\overline{MN}=2r+2r\sqrt{2}=c$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}c$.



Siga $s=\overline{DE}=\overline{EG}$ el radi dels 4 cercles menuts.

Siga la projecció de G sobre el segment $\overline{FH}$.

$\overline{EF}=\dfrac{c}{2}-s$, $\overline{HJ}=r-s$, $\overline{GH}=r+s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{GJH}$:

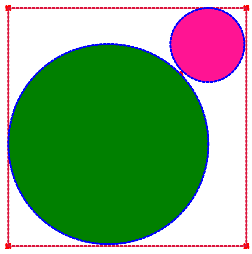
$$(r+s)^2=(r-s)^2+\left(\frac{c}{2}-s\right)^2.$$

$$s^2-(4r+c)s+\frac{c^2}{4}=0.$$

$s^2-\left(2\sqrt{2}-1\right)cs+\dfrac{c^2}{4}=0$. Resolent l'equació en la incògnita s:

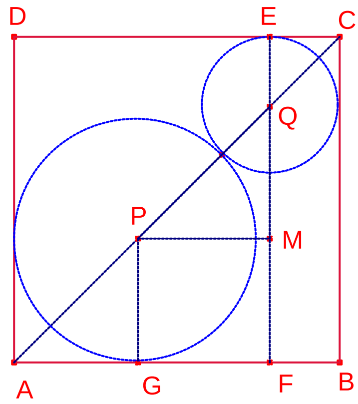
$$s=\frac{2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}c.$$

405.- En un triangle de costat c s'han inscrit dues circumferències tangents.
Proveu que la suma dels radis de les circumferències és constant.
Calculeu el valor de la constant.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $c = \overline{AB}$.
Siga $r = \overline{PG} = \overline{AG}$ radi d'una de les circumferències.
Considerem la recta EF que passa per Q i és perpendicular al costat $\overline{AB}$.
Siga $s = \overline{EQ} = \overline{BF}$ radi de l'altra circumferència.
Siga M la projecció de P sobre la recta EF.
$\overline{QM} = c - (r + s)$.
Aplicant el teorema de Pitàores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{PMQ}$:



$(r + s)^2 = 2(c - (r + s))^2$.

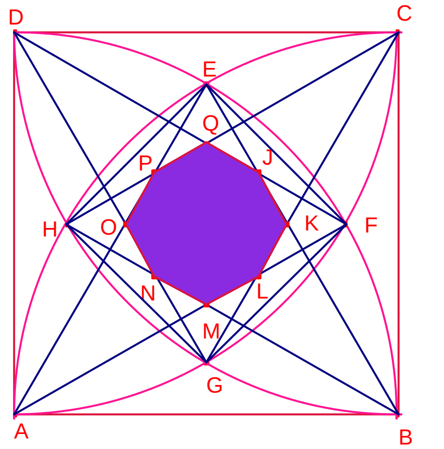
$r + s = (c - (r + s))\sqrt{2}$.

$r + s = \left(2 - \sqrt{2}\right)c$.

Aleshores, la suma dels radis de les circumferències és constant i la constant és $\left(2 - \sqrt{2}\right)c$.

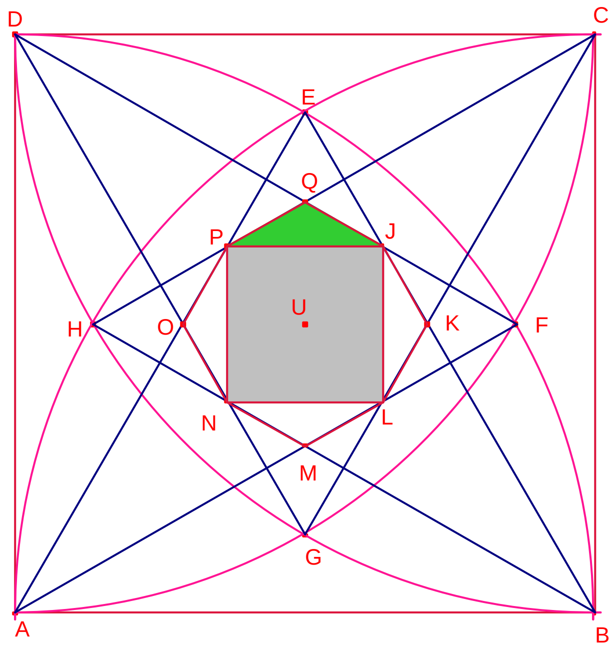
406.- Siga ABCD un quadrat de costat 2.
Construïm quatre quadrants de circumferència de centre cadascun dels vèrtexs i radi del costat del quadrat. Els arcs es tallen en els punts E, F, G, H.

Construïm els triangles $\overset{\Delta}{AFE}$, $\overset{\Delta}{BEH}$, $\overset{\Delta}{CHG}$ i $\overset{\Delta}{DGF}$.
Aquests quatre triangles formen un octògon JKLMNOPQ, l'àrea del qual es demana.
Barroso, 625



Solució:
$\angle ABE = 60^{o}$, $\angle EBC = \angle ABH = 30^{o}$.
Aleshores, $\angle HBE = 30^{o}$.
$\angle QCD = \angle CDQ = 30^{o}$, aleshores, $\angle DQC = 120^{o}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{PJQ}$, $\overset{\Delta}{JLK}$, $\overset{\Delta}{LNM}$, $\overset{\Delta}{NPO}$ són isòsceles i iguals.
L'octògon JKLMNOPQ té tots els costats iguals.
$\angle PJQ = 30^{o}$.
Aleshores, $\angle PJL = 90^{o}$
L'àrea de l'octògon és igual a l'àrea del quadrat JLNP de costat $\overline{PJ}$ més l'àrea de 4 triangles equilàters de costat $\overline{PQ}$ i altura $\frac{\overline{PJ}}{2}$.

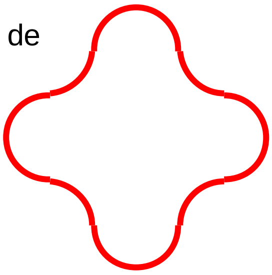


Siga U el centre del quadrat ABCD.
$\overline{BU} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB} = \sqrt{2}$.
$\angle JBU = 15^{o}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JUB}$:
$\overline{JU} = \overline{BU} \cdot tg15^{o} = \sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$.
$\overline{PJ} = \sqrt{2} \cdot \overline{JU} = 4 - 2\sqrt{3}$.
$\frac{\overline{PJ}}{2} = 2 - \sqrt{3}$.
$\frac{\overline{PJ}}{2 \cdot \overline{PQ}} = \cos 30^{o}$. Aleshores, $\overline{PQ} = \frac{4\sqrt{3}-6}{3}$.
L'àrea de l'octògon és:

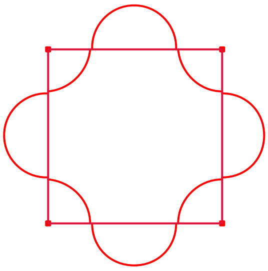
$$S_{octo} = S_{JLNP} + 4 \cdot S_{PJQ} = \overline{PJ}^2 + 4 \cdot \frac{\overline{PQ}^2\sqrt{3}}{4} = \left(4-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}-6}{3}\right)^2\sqrt{3} = \frac{36-20\sqrt{3}}{3}.$$

407.- La figura següent està formada per arcs de circumferència de diàmetre 2.
Calculeu el perímetre i l'àrea de la figura.



Solució:
Els arcs són tangents.
La figura està formada per 4 semicircumferències de diàmetre 2 (radi 1) i 4 quadrants de circumferència de diàmetre 2.
El perímetre és:

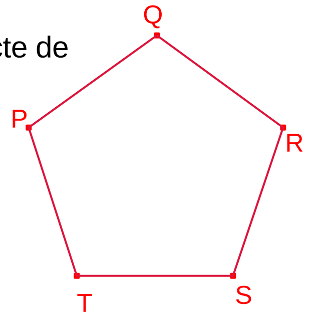
$$P = 4\left(\frac{1}{2}\pi 2\right) + 4\left(\frac{1}{4}\pi 2\right) = 6\pi .$$



L'àrea està formada per l'àrea d'un quadrat de costat 4 i un cercle de diàmetre 2.
La superfície és:

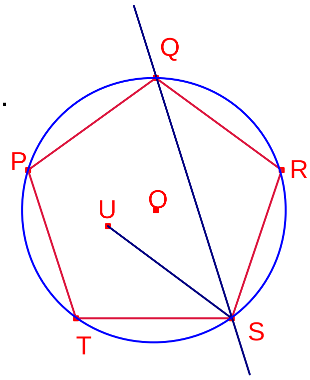
$$S = 4^2 + \pi \cdot 1^2 = 16 + \pi .$$

408.- Siga PQRST el pentàgon regular. Siga U el simètric de R respecte de la diagonal $\overline{QS}$.
Determineu la mesura de l'angle $\angle UST$.

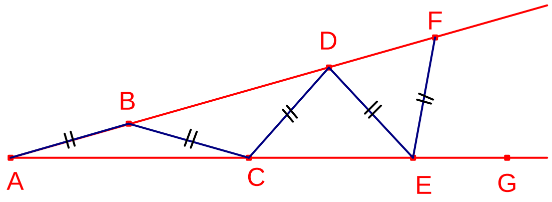


Solució:
L'angle interior d'un pentàgon regular és:
$\angle TSR = 108^o$
Si U és el simètric de R respecte de QS aleshores, $\angle RSQ = \angle QSU$.
$\angle QSR = 36^o$ per ser angle inscrit en la circumferència circumscrita del pentàgon i abraçar la cinquena part de circumferència.
Aleshores, $\angle UST = \angle TSR - 2\angle QSR = 108 - 2 \cdot 36^o = 36^o$.

Notem que U pertany a les diagonals $\overline{PS}$, $\overline{QT}$.



409.- Donades dues semirectes d'origen comú i angle α, i els segments $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}$.
Determineu la mesura dels angles $\angle DCE$, $\angle FEG$.



Solució:

$\angle BAC=\alpha$

Per ser $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\angle ACB=\alpha$.

Aleshores, $\angle CBD=2\alpha$.

Per ser $\overline{BC}=\overline{CD}$, $\angle BDC=2\alpha$.

Aleshores, $\angle DCE=\angle DAC+\angle BDC=\alpha+2\alpha=3\alpha$.

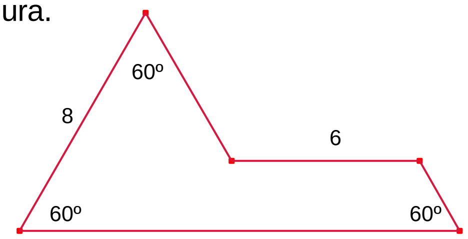
Per ser $\overline{CD}=\overline{DE}$, $\angle CED=3\alpha$.

Aleshores, $\angle EDF=\angle DAE+\angle CED=\alpha+3\alpha=4\alpha$.

Per ser $\overline{DE}=\overline{EF}$, $\angle DFE=4\alpha$.

Aleshores, $\angle FEG=\angle FAE+\angle DEF=\alpha+4\alpha=5\alpha$.

410.- Calculeu el perímetre de la següent figura.



Solució:

La recta ED talla el segment $\overline{AB}$ en el punt F.

$\angle AFE = 180º - 120º = 60º$.

$\overset{\Delta}{AFE}$ és un triangle equilàter.

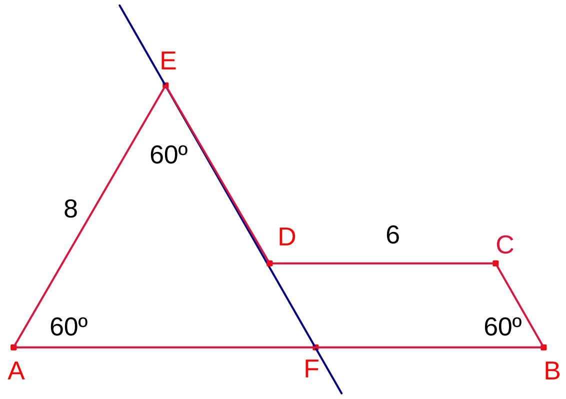
$\overline{AF} = \overline{EF} = 8$

FBCD és un paral·lelogram.

$\overline{FB} = \overline{DC} = 6$, $\overline{BC} = \overline{FD}$.

$\overline{ED} + \overline{BC} = \overline{ED} + \overline{FD} = \overline{EF} = 8$.

$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = 8 + 6 = 14$.



El perímetre de la figura és:

$\overline{AE} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{ED} = 8 + 14 + 8 + 6 = 36$.