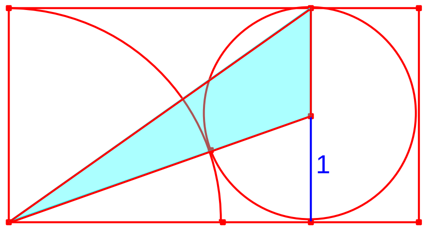
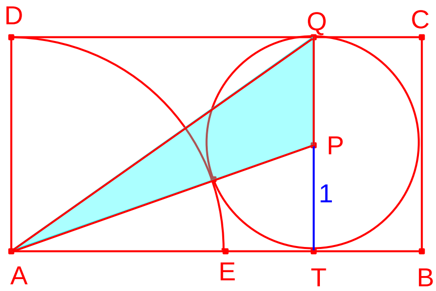
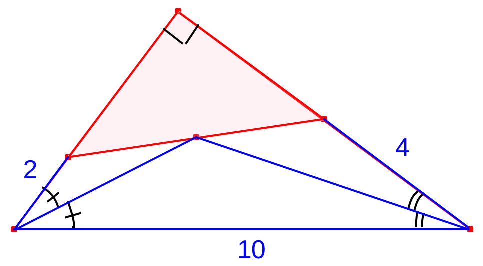
4091.- La figura està formada per un rectangle que conté en el seu interior un quadrant i una circumferència tangents.
La circumferència té radi 1.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



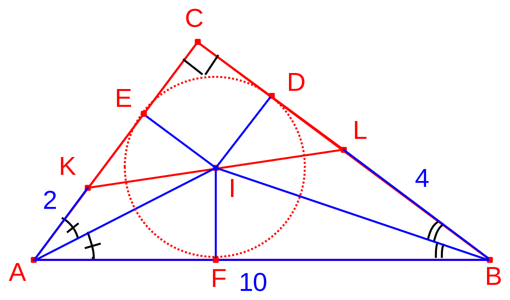
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$, $\overline{AD} = \overline{AE} = 2$
$\overline{AP} = 3$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:
$\overline{AT} = 2\sqrt{2}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és:
$S_{APQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{AT} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$



4092.- Calculeu l'àrea de la zona ombrejada de la figura.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$.
Siguen $\overline{CL} = a, \overline{CK} = b$
El punt I és l'incentre del triangle, intersecció de les bisectrius dels angles aguts.
Siga $r = \overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF} = r$ radi de la circumferència inscrita al triangle.

$$r = \frac{a+4+b+2-10}{2} = \frac{a+b-4}{2}$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(a+4)(b+1)$$

$$S_{ABC} = S_{KCL} + S_{ABLK} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}(2+4+10)r = \frac{1}{2}ab + 8 \cdot \frac{a+b-4}{2}$$

Igualant les dues expressions:

$$\frac{1}{2}(a+4)(b+1) = \frac{1}{2}ab + 4(a+b-4)$$

Simplificant:

$$3a + 2b = 20$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$(a+4)^2 + (b+2)^2 = 100$$

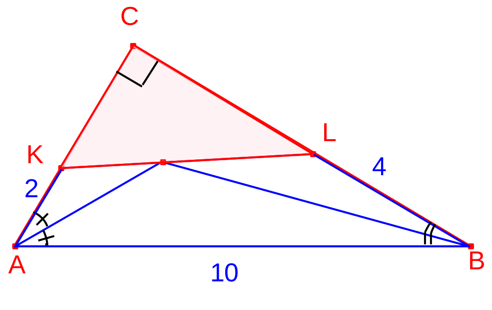
Resolent el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}, \begin{cases} a = \frac{60}{13} \\ b = \frac{40}{13} \end{cases}$$

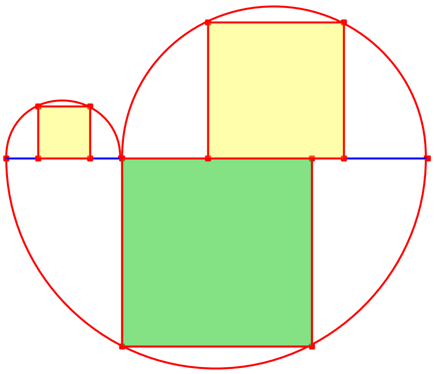
Les solucions són:

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}, \qquad S_{CKL} = \frac{1}{2}ab = 8$$

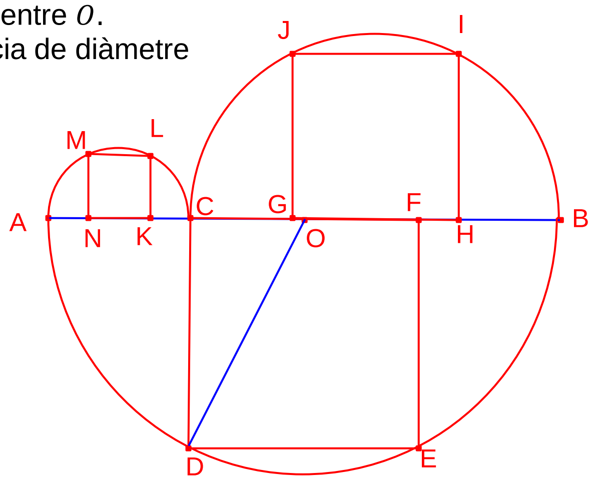
$$\begin{cases} a = \dfrac{60}{13} \\ b = \dfrac{40}{13} \end{cases}, \qquad S_{CKL} = \frac{1}{2}ab = \frac{1200}{169}$$



4093.- La figura està formada per tres semicercles que tenen cadascun un quadrat inscrit.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels quadrats grocs i l'àrea del quadrat verd.



Solució:
Les àrees dels quadrats són semblants als quadrats dels radis de les semicircumferències.
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2R$ i centre O.
Siga el quadrat $CDEF$ inscrit en la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$, de costat $\overline{CD} = c$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCD}$:

$$R^2 = \frac{5}{4}c^2$$

$$c = \frac{2\sqrt{5}}{5}R$$

Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AC} = 2s$
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{BC} = 2r$

$$R = r + s$$

$$2s = R - \frac{1}{2}c = \frac{5-\sqrt{5}}{5}R$$

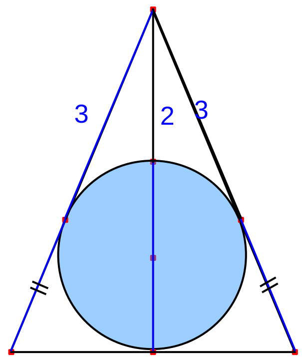
$$s = \frac{5-\sqrt{5}}{10}R$$

$$r = R - s = \frac{5+\sqrt{5}}{10}R$$

La proporció d'àrees que cerquem és:

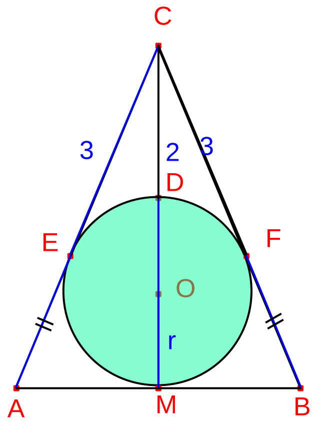
$$\frac{S_{groga}}{S_{verda}} = \frac{s^2 + r^2}{R^2} = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^2 + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

4094.- Calculeu l'àrea del cercle inscrit en el triangle de la figura.



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = \overline{BC}$



r=OM radi de la circumferència

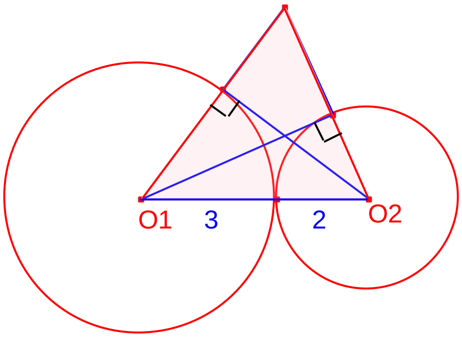
Aplicant la potència de C respecte de la circumferència

$2(2+2r)=3^2$

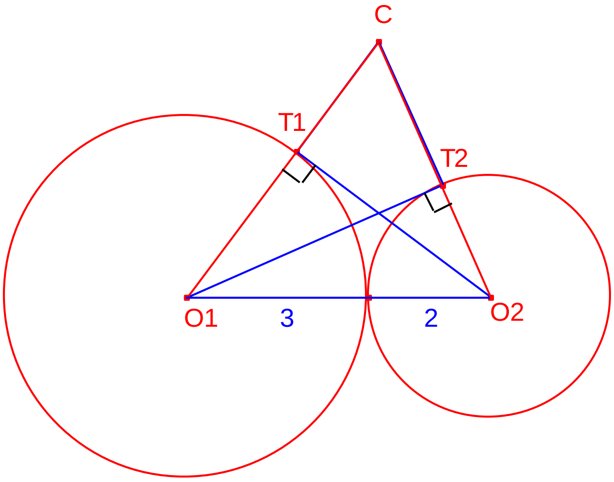
r=5/4

àrea
S=(25/16)Pi

4095.- La figura està formada per dues circumferències tangents de radis 3, 2
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



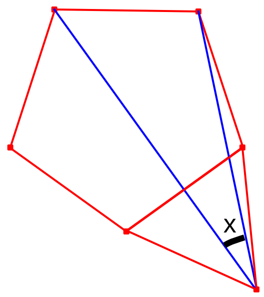
Siga el triangle $\overset{\Delta}{O_1O_2C}$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{O_1O_2T_2}, \overset{\Delta}{O_1O_2T_1}$:
$\overline{O_1T_2} = \sqrt{21}, \overline{O_2T_1} = 4$

Siguen $\overline{CT_1} = a, \overline{CT_2} = b$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{O_1T_2C}, \overset{\Delta}{O_2T_1C}$:
$(3+a)^2 - b^2 = 21$
$(2+b)^2 - a^2 = 16$
Resolent el sistema:
$$a = \frac{48 - 8\sqrt{21}}{5}, b = \frac{-42 + 12\sqrt{21}}{5}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{O_1O_2C}$ és:
$$S = \frac{1}{2}\overline{O_1C} \cdot \overline{O_2T_1} = \frac{1}{2}\frac{63 - 8\sqrt{21}}{5} \cdot 4 = \frac{126 - 16\sqrt{21}}{5} \approx 105358$$

4096.- La figura està formada per un pentàgon regular i un triangle equilàter sobre l'exterior d'un costat.
Calculeu la mesura de l'angle x.



Solució:

Siga l'hexàgon regular $ABCDE$ i el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABF}$

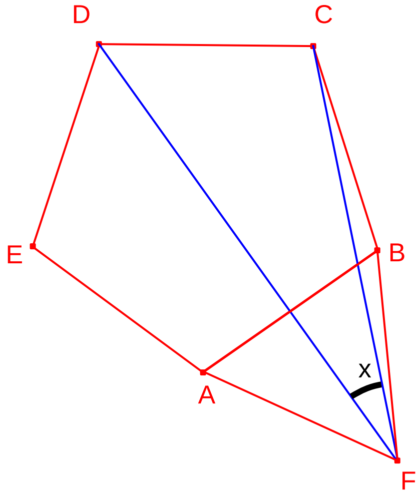
$\angle BFD = 30°$

$\angle CBF = 108° + 60° = 168°$

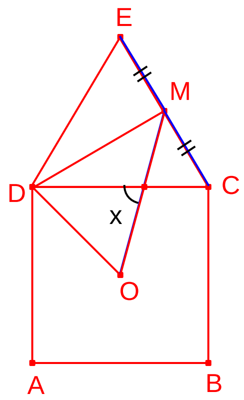
El triangle $\overset{\Delta}{FBC}$ és isòsceles.

$\angle BFC = \frac{1}{2}(180° - 168°) = 6°$

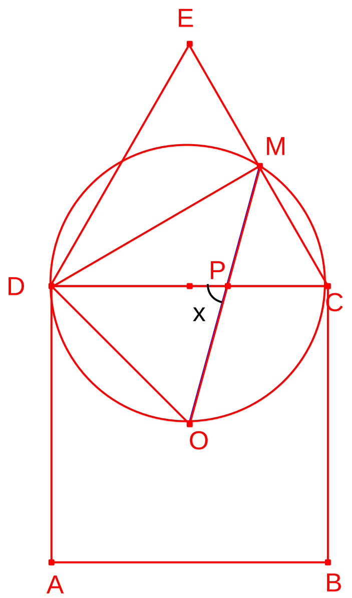
$x = \angle DFC = 30° - 6° = 24°$



4097.- La figura està formada per un quadrat i un triangle equilàter sobre l'exterior d'un costat. Calculeu la mesura de l'angle x



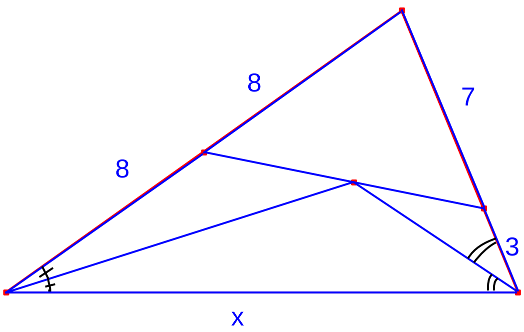
Solució:



AngleDMC=90º
AngleDOC=90º

OCMD cíclic
AngleDOM=DCM=60º
x=75º

4098.- Calculeu la mesura del segment x de la figura.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = 16, \overline{BC} = 10, \overline{AB} = x$

Siga $\angle ACB = \alpha$.

El punt I és l'incentre del triangle, intersecció de les bisectrius dels angles aguts.

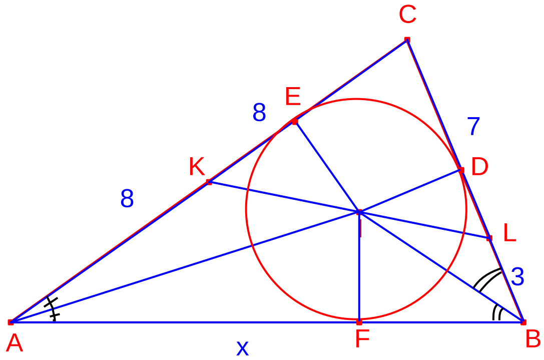
Siga $r = \overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF} = r$ radi de la circumferència inscrita al triangle.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot \sin\alpha$$

$$S_{ABC} = S_{KCL} + S_{ABLK} = \frac{1}{2} 56 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}(8 + 3 + x)r$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(16 + 10 + x)r$$



$$80 \cdot \sin\alpha = 28 \cdot \sin\alpha + \frac{11 + x}{2} r$$

$$\sin\alpha = \frac{11 + x}{104} r$$

$$80 \cdot \sin\alpha = \frac{26 + x}{2} r$$

$$\sin\alpha = \frac{26 + x}{160} r$$

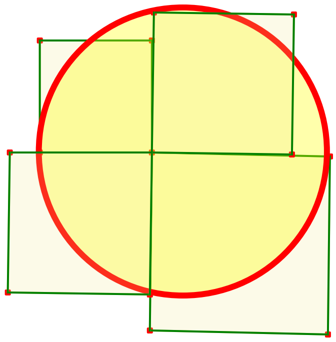
Igualant les dues expressions:

$$\frac{26 + x}{160} = \frac{11 + x}{104}$$

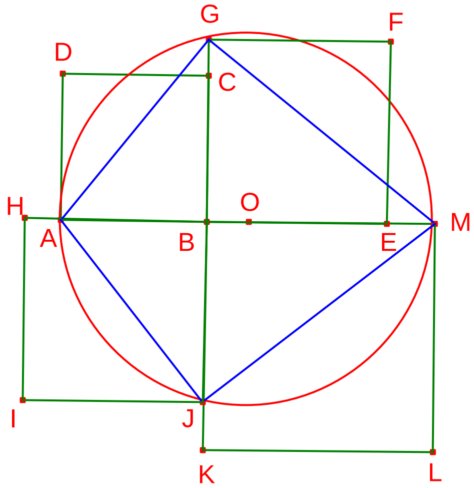
Resolent l'equació:

$$x = \frac{118}{7}$$

4099.- Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea de la suma dels quatre quadrats.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
Siga el quadrat $BHIJ$ de costat $\overline{BH} = c$
Siga el quadrat $BKLM$ de costat $\overline{BK} = d$



El radi de la circumferència és $\overline{OM} = \frac{a+d}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABJ}, \overset{\Delta}{JBM}$:
$\overline{AJ}^2 = a^2 + c^2, \overline{JM}^2 = c^2 + d^2$

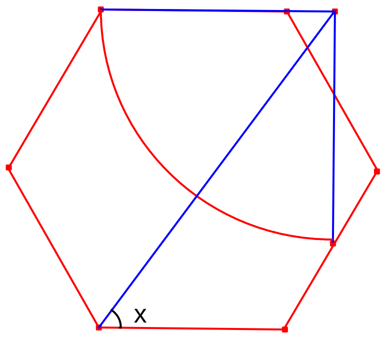
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AJM}$:
$(a+d)^2 = a^2 + d^2 + 2c^2$
Simplificant:
$c^2 = ad$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABG}, \overset{\Delta}{BMG}$:
$\overline{AG}^2 = a^2 + b^2, \overline{MG}^2 = b^2 + d^2$

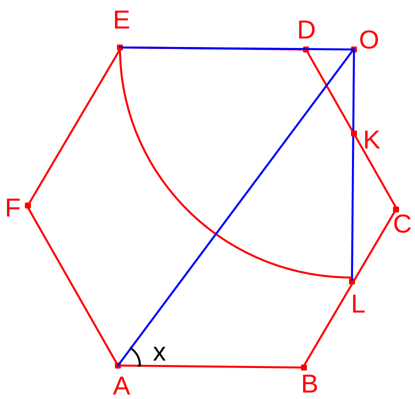
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGM}$:
$(a+d)^2 = a^2 + d^2 + 2b^2$
Simplificant:
$c^2 = ad$
Aleshores, $b = c$
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{cercle}}{S_{quadrats}} = \frac{\pi\left(\frac{a+d}{2}\right)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} = \frac{\pi\left(\frac{a+d}{2}\right)^2}{a^2+d^2+2b^2} = \frac{\pi\left(\frac{a+d}{2}\right)^2}{a^2+d^2+2ad} = \frac{\pi}{4}$$

4100.- La figura està formada per un hexàgon regular i un quadrant.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



AB=1 BD=sqrt(3)

OD=a

DK=2a, CK=1-2a

OK=a·sqrt(3)

KL=(1+2a)·sqrt(3)

1+a=sqrt(3)-a·sqrt(3)

a=2-sqrt(3)

tan x = sqrt(3)//3-sqrt(3))=(1+sqrt(3))/2