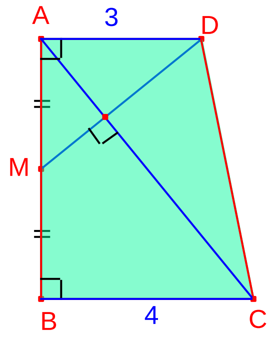
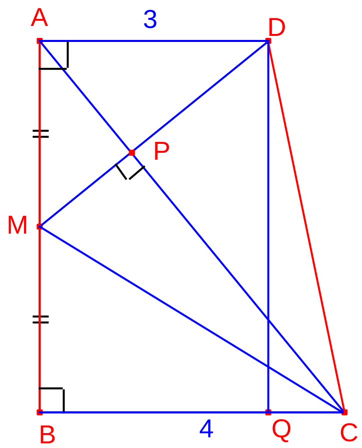
4111.- Siga el trapezi rectangle $ABCD$, $\overline{AD}=3, \overline{BC}=4$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Si els segments $\overline{AC}, \overline{MD}$ són perpendiculars, calculeu l'àrea del trapezi

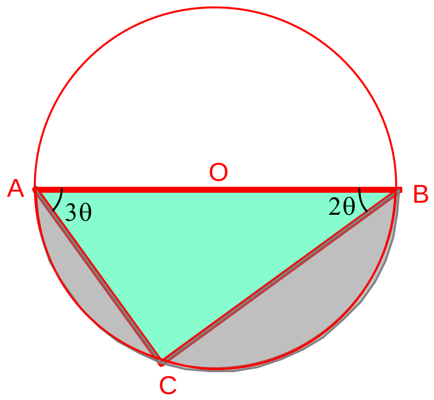


Solució:
Siga P la intersecció dels segments $\overline{AC}, \overline{MD}$.
Siga Q la projecció de D sobre $\overline{BC}$
Siguen $\overline{AM}=\overline{BM}=a, \overline{MP}=b$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{MAD}, \overset{\Delta}{MBC}, \overset{\Delta}{APM}, \overset{\Delta}{DQC}$:
$\overline{MD}=\sqrt{a^2+9}$
$\overline{CM}=\sqrt{a^2+16}$
$\overline{AP}=\sqrt{a^2-b^2}$
$\overline{CD}=\sqrt{4a^2+1}$

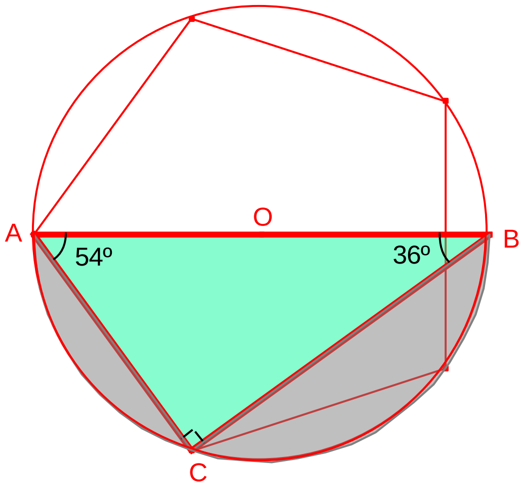


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangles $\overset{\Delta}{APD}$:
$\overline{DP}=\sqrt{9-a^2+b^2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{MPC}, \overset{\Delta}{DPC}$:
$a^2+16-b^2=4a^2+1-(9-a^2+b^2)$
Simplificant:
$4a^2=24$
$a=\sqrt{6}$
L'àrea del trapezi $ABCD$ és:
$$S_{ABCD}=\frac{4+3}{2}\cdot 2\sqrt{6}=7\sqrt{6}$$

4112.- En la figura el radi de la circumferència és 12.
Calculeu l'àrea grisa.



Solució:

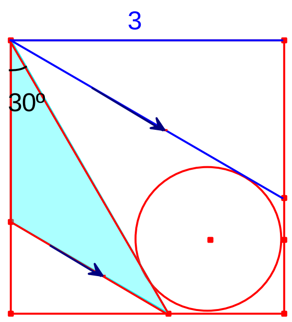


AB=24·sin36º

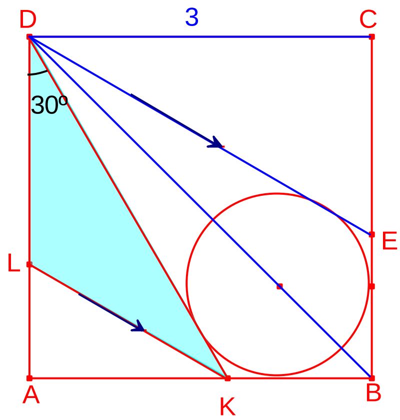
[ABC]=144·sin72º

[Grisa]=72·Pi-144·sin72º=89.2425

4113.- La figura està formada per un quadrat de costat 3, dos segment paral·lels, un segment que forma 30º amb el costat. i una circumferència tangent als costats del quadrat i a dos segments.
Calculeu l’àrea del triangle ombrejat.



Solució:



Angle BDK=Angle EDB=15º

angleCDE=AngleKLA=30º

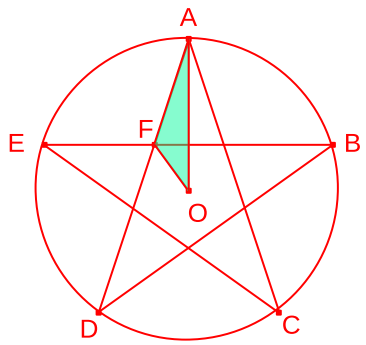
AK=sqrt(3)

AL=1

DL=2

[DLK]=(1/2)·2·sqrt(3)=sqrt(3)

4114.- Una estrella regular de cinc puntes està inscrita en una circumferència de radi 10.
Calculeu l'àrea de l'estrella de cinc puntes.



Solució:
Siga $\overline{OA} = 10$ radi de la circumferència circumscrita a l'estrella.
Siga $x = \overline{OF} = x$
$\angle FOA = 36°, \angle AFO = 126°, \angle FAO = 18°$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AFO}$:

$$\frac{10}{\sin 126°} = \frac{x}{\sin 36°}$$

$$x = 10 \cdot \frac{\sin 36°}{\sin 54°}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AFO}$ és:

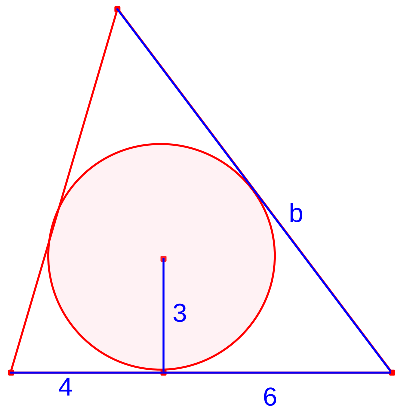
$$S_{AFO} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sin 36°}{\sin 54°} \cdot \sin 18° = 50 \cdot \frac{\sin 36° \cdot \sin 18°}{\sin 54°} = 50 \cdot \frac{\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$S_{AFO} = \frac{25}{2}\sqrt{50 - 22\sqrt{5}}$$

L'àrea de l'estrella regular és:

$$S_{ABCCDE} = 10 \cdot S_{AFO} = 125\sqrt{50 - 22\sqrt{5}} \approx 112.2570$$

4115.- El triangle de la figura té dibuixada la seua circumferència inscrita de radi 3.
Calculeu la mesura del costat b



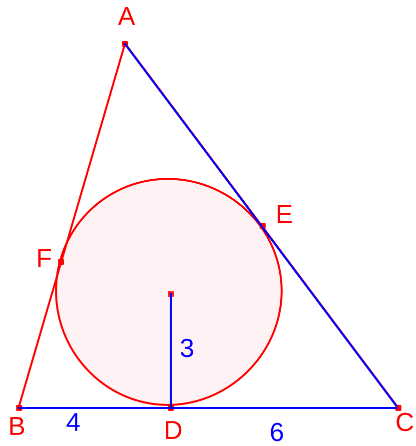
Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{BC} = 10$
$\overline{BD} = 4, \overline{CE} = 6, \overline{AE} = \overline{AF} = b - 6$
$\overline{AB} = b - 2$

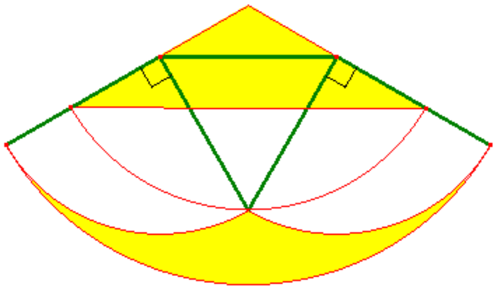
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{10 + b + b - 2}{2} \cdot 3 = \frac{\sqrt{(2b+8)(2b-12) \cdot 12 \cdot 8}}{4}$$

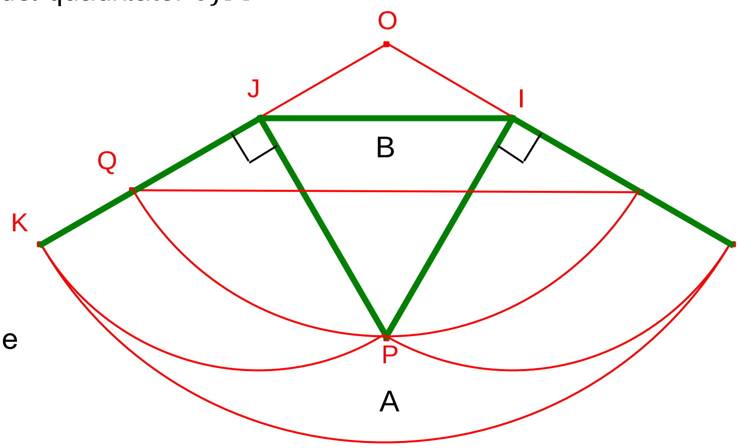
Simplificant:
$(b + 4) \cdot 3 = 2\sqrt{(b+4)(b-6)6}$
Elevant al quadrat i simplificant:
$(b - 4)3 = 8(b - 6)$
Resolent l'equació:
$b = 12$



4116.- Els segments verds de la figura són iguals
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.

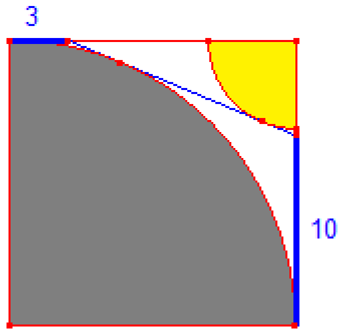


Solució:
Siga $\overline{JK} = \overline{JI} = \overline{JP} = \overline{IP} = 1$
$\angle OJI = 30°$
$\angle JOI = 120°$
$\overline{OJ} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \overline{OP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
L'àrea ombrejada A és igual a l'àrea del sector de 120º i radi $\overline{OK}$ menys l'àrea d'un semicercle de radi $\overline{JK} = 1$ menys l'àrea del quadrilàter $OJPI$

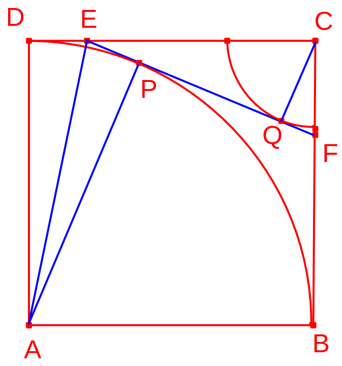


$$A = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi 1^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$
L'àrea del triangle B és:
$$B = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
L'àrea ombrejada és:
$$A + B = \left(\frac{4\sqrt{3}-1}{18}\right)\cdot\pi$$
L'àrea total és igual a l'àrea del sector de 120º:
$$T = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(4+2\sqrt{3})\pi$$
La proporció d'àrees:
$$\frac{A+B}{T} = \frac{\frac{4\sqrt{3}-1}{18}}{\frac{1}{9}(4+2\sqrt{3})} = \frac{9\sqrt{3}-14}{4} \approx 0.3971$$

4117.- La figura està formada per un quadrat i dos quadrants.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrants.



Solució:



DE=PE=3, BF=PF=10

AB=AP=c

CQ=r

CE=c-3, CF=c-10, EF=13

Teorema Pitàgores ECF

$13^2=(c-3)^2+(c-10)^2$

c=15

angle EAP=x

angleDAP=AngleQCF=2x

tan x=1/5

cos(2x)=12/13

CF=5

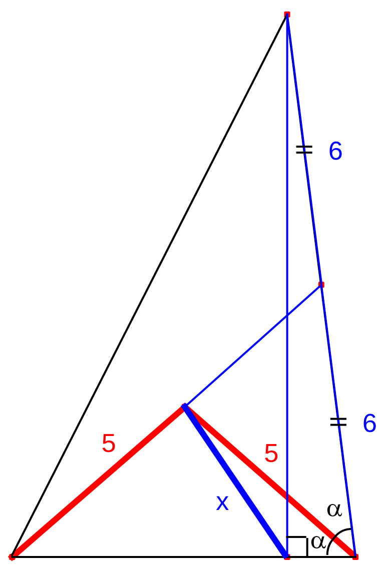
r/5=12/13

r=60/13

Propoció àrees:

$(60/13)^2/15^2=16/169$

4118.- En la figura, calculeu la mesura del segment x



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{BC} = 12, \overline{AB} = c$
Siga E el punt mig del costat $\overline{BC}$
Siga D del segment $\overline{AE}$, tal que $\overline{AD} = \overline{BD} = 5$
Siga $\overline{DE} = d$
$\angle DAB = \alpha, \angle EDB = 2\alpha$
Els triangles $\overset{\Delta}{BDE}, \overset{\Delta}{ABE}$ són semblants.
aplicant el teorema de Tales:

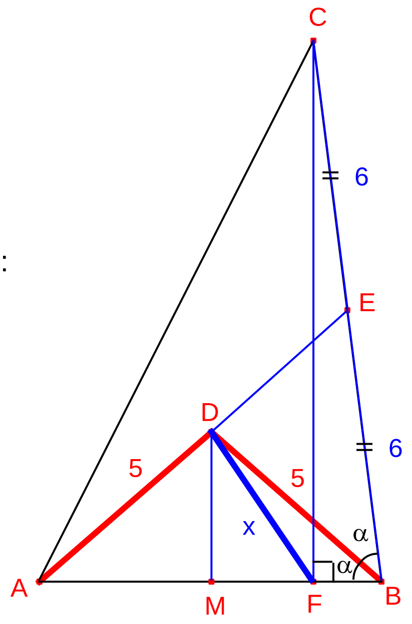
$$\frac{d+5}{6} = \frac{6}{d} = \frac{c}{5}$$

Resolent el sistema:

$$d = 4, c = \frac{15}{2}$$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

$$\overline{AM} = \frac{15}{4}$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:

$$\overline{DM} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1}{8}$$

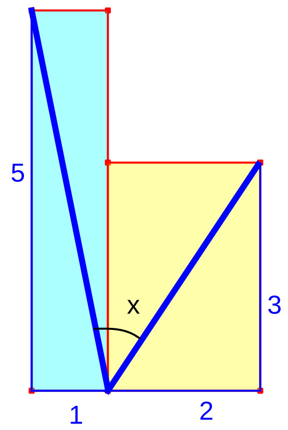
$$\overline{BF} = 12 \cdot \cos(2\alpha) = \frac{3}{2}$$

$$\overline{MF} = \frac{15}{4} - \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

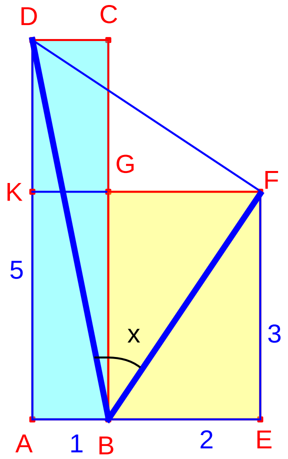
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMF}$:

$$x = \sqrt{\frac{175}{16} + \frac{81}{16}} = 4$$

4119.- La figura està formada per dos rectangles. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



KFD, FEB iguals

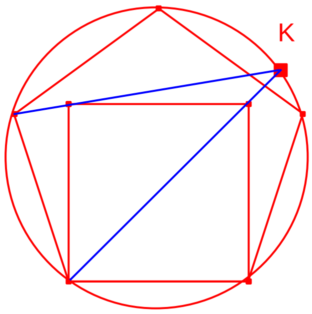
BF=DF=sqrt(13)

BD=sqrt(26)

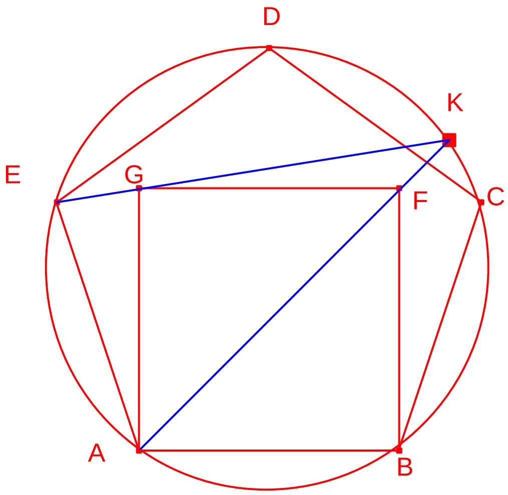
Angle BFD=90º

x=45º

4120.- La figura està formada per un pentàgon regular inscrit en una circumferència i un quadrant sobre un costat.
Proveu que el punt K pertany a la circumferència.



Solució:



AE=AG

Angle EAG=108º-90º=18º

Angle AEG=(180º-18º)/2=81º

Angle EAK=18º+45º=63º

Angle EKA=180º-(63º+81)=36º

Angle ACE=36º

K pertany a la circumferència