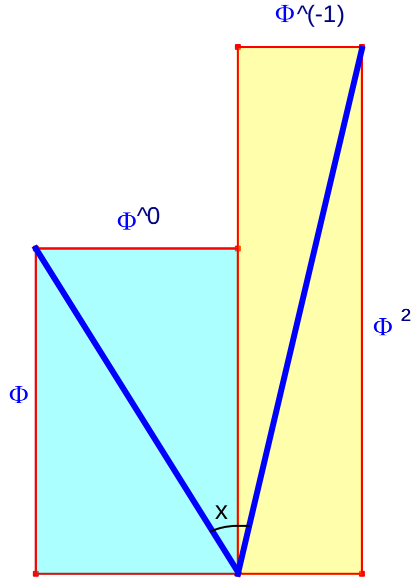
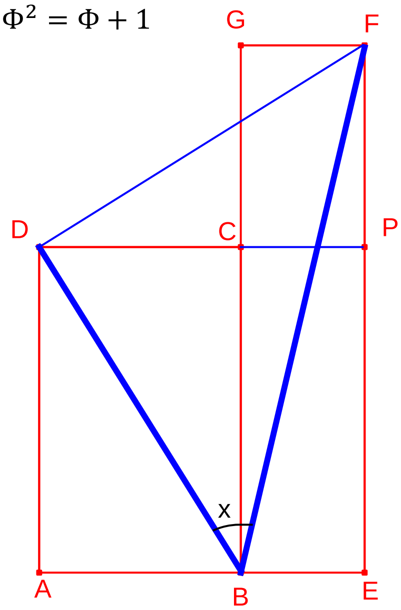
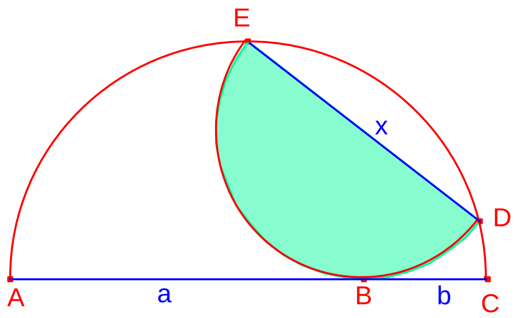
4121.- La figura està formada per dos rectangles.
Calculeu la mesura de l'angle x



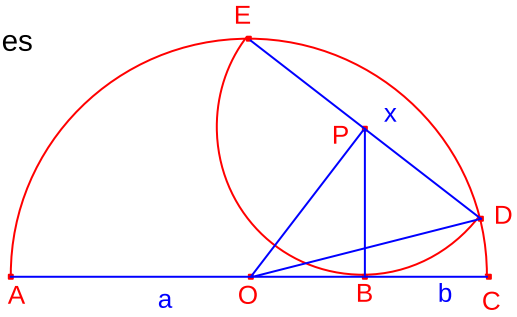
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 1, \overline{AD} = \Phi$
Siga el quadrat $BEFG$ de costats $\overline{GF} = \Phi^{-1} = \Phi - 1, \overline{EF} = \Phi^2 = \Phi + 1$
Siga P la projecció de D sobre $\overline{EF}$
$\overline{PF} = \Phi + 1 - \Phi = 1$
$\overline{DP} = 1 + \Phi^{-1} = \Phi$
Els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{A}B, D\overset{\Delta}{P}F$ són iguals.
Aleshores,
$\overline{DB} = \overline{FB}, \angle BDF = 90°$
Aleshores, $x = \angle DBF = 45°$



4122.- La figura està formada per dos semicercles l'ombrejat té diàmetre x i és tangent al diàmetre del semicercle exterior. formant dos segments de longituds a, b.
Proveu que $x^2 = 2ab$

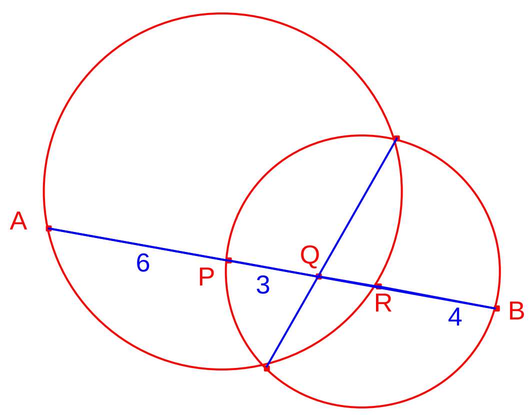


Solució:
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OD} = \frac{1}{2}(a+b)$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PD} = \overline{PB} = \frac{1}{2}x$
Siga $\overline{OP} = y$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OPD}, \overset{\Delta}{OBP}$:

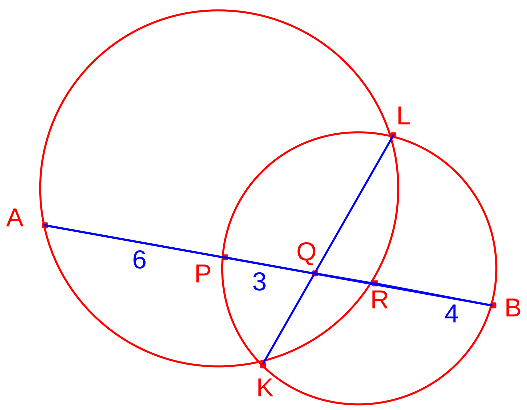


$$y^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$$
$$y^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4}$$
Igualant les expressions:
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} y^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4}$$
Simplificant:
$$x^2 = 2ab$$

4123.- Siguen dues circumferències secants tal que:
$\overline{AP} = 6, \overline{PQ} = 3, \overline{RB} = 4$
Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$



Solució:

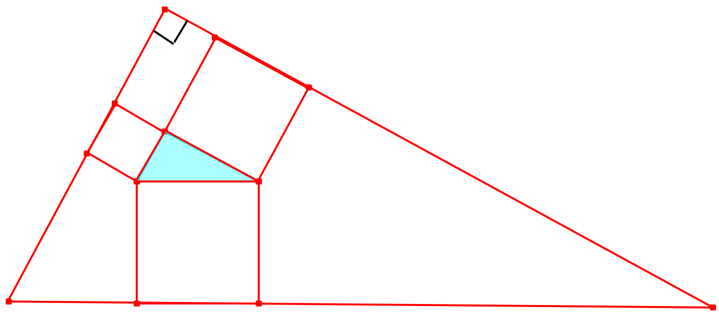


Siga $\overline{KL}$ la corda comuna a les dues circumferències.
Siguen $\overline{QR} = a, \overline{QK} = b, \overline{QL} = c$
Aplicant la potència del punt Q respecte cadascuna de les dues circumferències:
$\overline{AQ} \cdot \overline{RQ} = \overline{KQ} \cdot \overline{LQ}$
$9a = bc$

$\overline{PQ} \cdot \overline{BQ} = \overline{KQ} \cdot \overline{LQ}$
$3(a + 4) = bc$

Igualant ambdues expressions:
$9a = 3(a + 4)$
Resolent l'equació:
$\overline{QR} = 2$
$\overline{AB} = 13 + a = 15$

4124.- Un triangle rectangle amb tres quadrats que formen un triangle interior més menut. Quina és la fracció blava màxima?

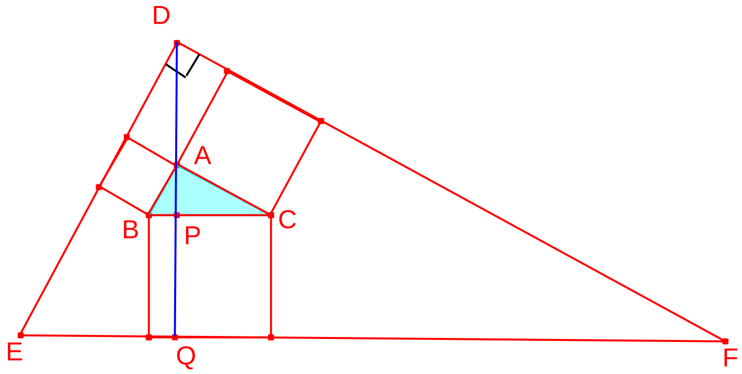


Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AB} = c, \overline{AC} = b, \overline{BC} = a, \angle ACB = \gamma$
Siga $\overline{AP} = h$ altura sobre la hipotenusa.

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEF}, D = 90°$
Els dos triangles són semblants.
Siga $\overline{DQ}$ altura sobre la hipotenusa.
D, A, P, Q estan alineats.
$\overline{AD} = a$
$\overline{DQ} = 2a + h$
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \left(\frac{h}{2a+h}\right)^2$$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$h = b \cdot \sin\gamma\,, b = a \cdot \cos\gamma$

$$h = \frac{1}{2} a \cdot \sin 2\gamma$$

La funció proporció és:

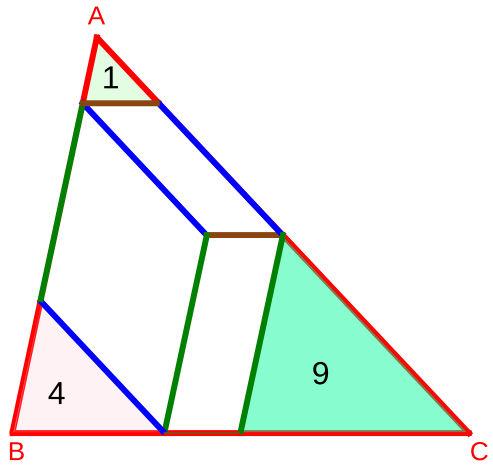
$$p(\gamma) = \left(\frac{\sin 2\gamma}{4 + \sin 2\gamma}\right)^2$$

$p'(\gamma) = 0$ quan $\gamma = \frac{\pi}{4}$
La proporció màxima és:

$$p\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

4125.- En la figura, els segments del mateix color són paral·lels.

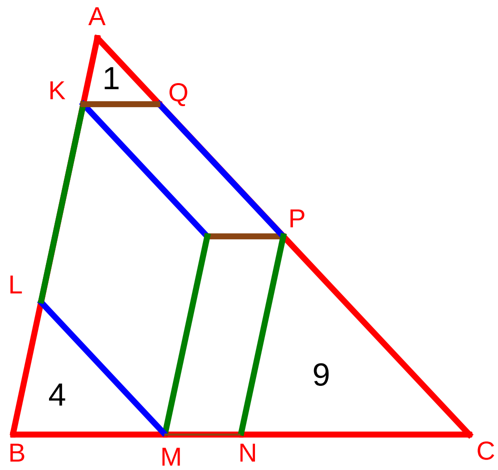
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{AKQ}, \overline{AK} = a$

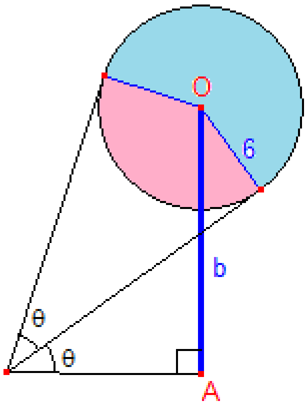
Els triangles $\overset{\Delta}{AKQ}, \overset{\Delta}{LBM}, \overset{\Delta}{PNC}, \overset{\Delta}{ABC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:



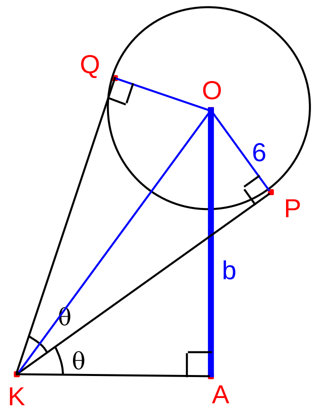
$\overline{LB} = 2a, \overline{KL} = \overline{PN} = 3c$
$\overline{AB} = 6a$

$S_{ABC} = 6^2 \cdot S_{AKQ} = 36$

4126.- En la figura dos segments són tangents a la circumferència de radi 6.
La proporció entre l’àrea rosa i la blava és $2:3$
Calculeu la mesura del segment $\overline{OA}$

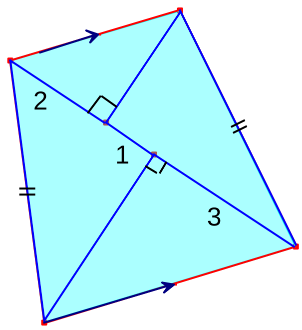


Solució:
Siguen $\overline{KP}, \overline{KQ}$ segments de tangència.
Com que la proporció entre l’àrea rosa i la blava és $2:3$

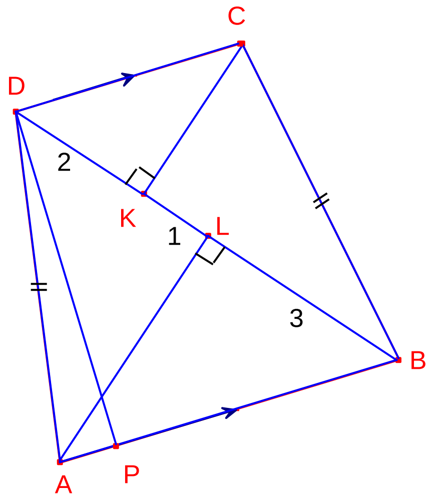


$$\angle POQ = \frac{2}{5} \cdot 360° = 144°$$
$$\theta = 36°$$
$$\angle OKP = 18°$$
$$\angle OKA = 54°$$
$$\overline{OK} = \frac{OP}{\sin 18°} = \frac{6}{\sin 18°}$$
$$b = \overline{OK} \cdot \sin 54° = 6\frac{\cos 36°}{\cos 72°} = 6\frac{\frac{\Phi}{2}}{2\left(\frac{\Phi}{2}\right)^2 - 1} = 6 \cdot \Phi^2 = 3\left(3+\sqrt{5}\right)$$

4127.- La figura està formada per un trapezi isòsceles tal que la diagonal s'ha dividit en tres parts de longituds 2, 1, 3.
Calculeu l'àrea del trapezi.



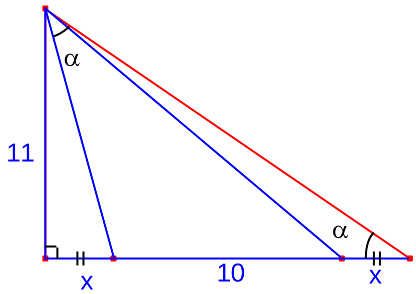
Solució:
Siga el trapezi isòsceles $ABCD$ de costats paral·lels $\overline{AB}, \overline{CD}$
Siga $\overline{DK} = 2, \overline{KL} = 1, \overline{LB} = 3$
siguen $\overline{AD} = \overline{BC} = a, \overline{CD} = b$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DLA}, \overset{\Delta}{BLA}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{AB} = \overline{AD} = a$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangle
$\overset{\Delta}{CKD}, \overset{\Delta}{BKC}$
$b^2 - 4 = a^2 - 16$
$(a+b)(a-b) = 12$



Siga P la projecció de D sobre $\overline{AB}$
$\overline{AP} = \frac{a-b}{2}, \overline{BP} = \frac{a+b}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangle
$\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{BPD}$
$a^2 - \left(\frac{a}{a-2}\right)^2 = 36 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
$a(a+b) = 36$

Dividint les dues expressions:
$b = \frac{2}{3}a,$
Resolent el sistema:
$a = \frac{6\sqrt{15}}{5}, b = \frac{4\sqrt{15}}{5}$
$\overline{AP} = \sqrt{21}$
L'àrea del trapezi $ABCD$ és:
$$S_{ABCD} = \frac{\frac{6\sqrt{15}}{5} + \frac{4\sqrt{15}}{5}}{2}\sqrt{21} = \frac{3\sqrt{35}}{5}$$

4128.- En el triangle rectangle de la figura calculeu la mesura del segment x



Solució:

Siga $\beta = \angle AEC$

$\overline{CD} = \sqrt{121 + x^2}, \overline{CE} = \sqrt{221 + 20x - x^2}, \overline{CB} = \sqrt{221 + 40x + 4x^2}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$$\frac{\overline{DE}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{CD}}{\sin\beta}$$

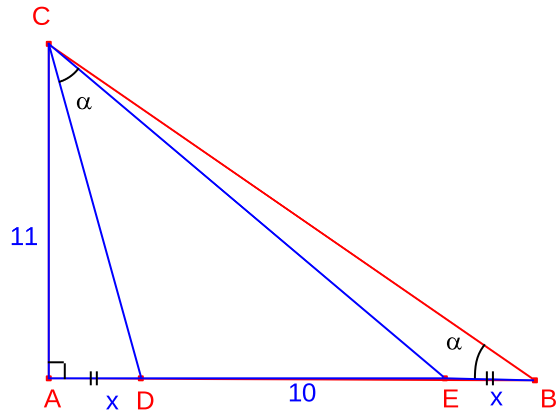
$$\frac{10}{\frac{11}{\sqrt{221 + 40x + 4x^2}}} = \frac{\sqrt{121 + x^2}}{\frac{11}{\sqrt{221 + 20x - x^2}}}$$

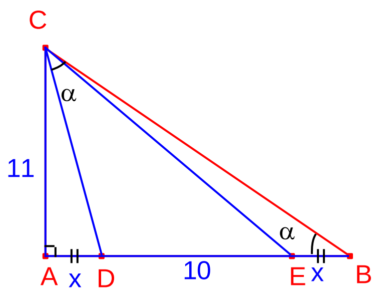
Elevant al quadrat i simplificant:

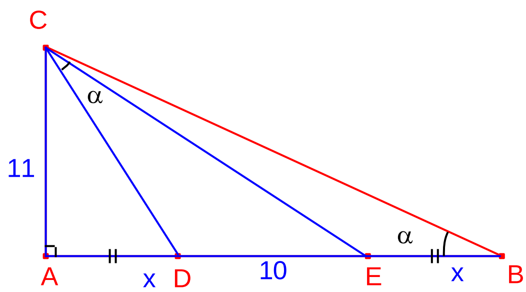
$x^4 + 20x^3 - 58x^2 - 1580x + 4641$

Resolent l'equació:

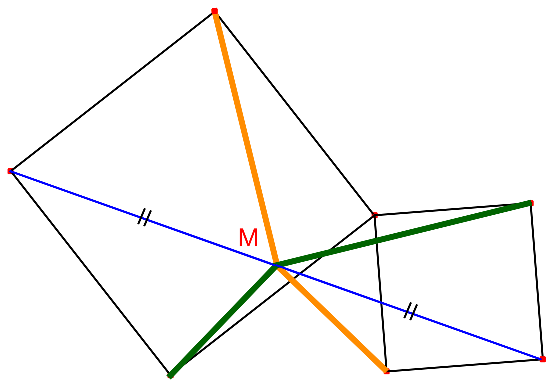
$x = 3, x = 7$



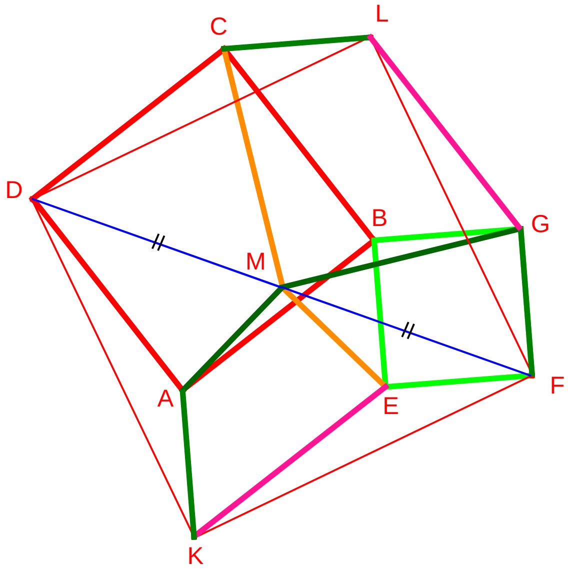




4129.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la proporció entre les sumes de les longituds dels segments taronja i dels segments verds.



Solució:



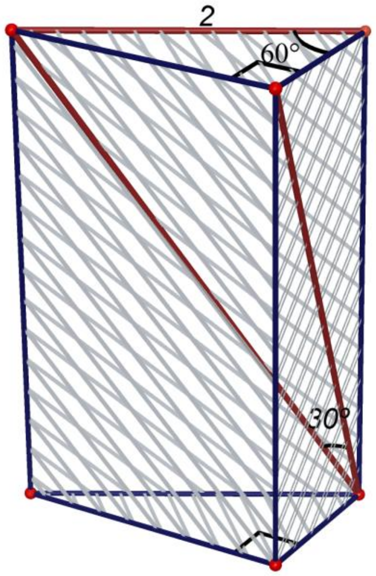
gir de centre M i 90º transforma F en L
gir de centre M i 90º transforma G en C
gir de centre M i 90º transforma L en D

MG=MC
MA=ME

MC+ME=MG+MA

Notem que $\angle AME = 90°, \angle CMG = 90°$

4130.- Calculeu el volum del prisma recte triangular de la figura.



Solució:
Siga el prisma recte triangular $ABCA'B'C'$
Siga $\overline{A'C'} = 2, \angle A'B'C' = 90°, \angle B'C'A' = 60°$
$\overline{B'C'} = 1, \overline{A'B'} = \sqrt{3}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'B'C}, B' = 90°$
$\overline{A'C} = 2\sqrt{3}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'AC},\ A = 90°$
$\overline{AA'} = 2\sqrt{2}$
El volum del prisma és:
$V_{prisma} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$