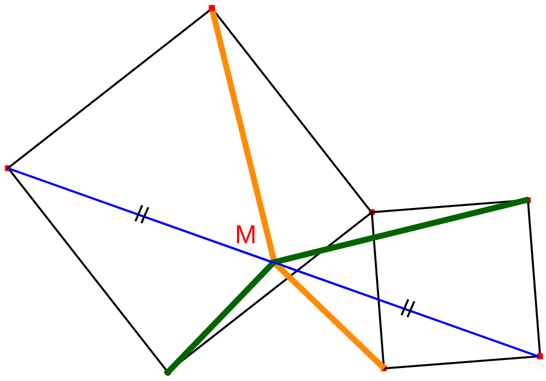
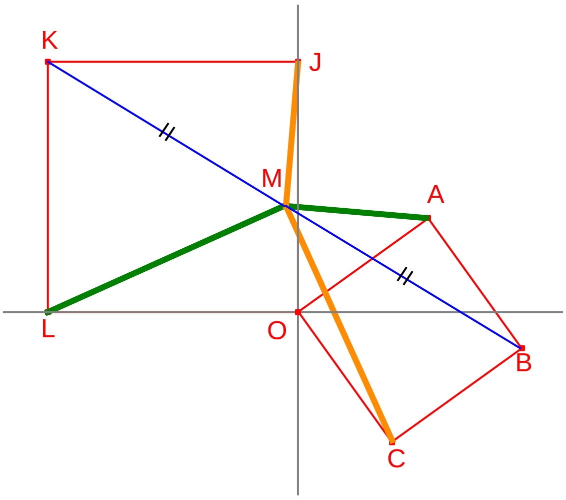


4131.- La figura està formada per dos quadrats. Calculeu la proporció entre les sumes de les longituds dels segments taronja i dels segments verds.

Solució:



Siga el quadrat $OJKL, O(0,0), J(0,1), K(-1,1), L(-1,0)$
Siga el quadrat $OABC, A(a,b), B(a+b,-a+b), C(b,-a)$
Siga M el punt mig del segment $\overline{KB}$

$M\left(\frac{-1+a+b}{2},\frac{1-a+b}{2}\right)$

$\overrightarrow{MJ}\left(\frac{1-a-b}{2},\frac{1+a-b}{2}\right), \overrightarrow{MA}=\left(\frac{1+a-b}{2},\frac{-1+a+b}{2}\right)$

$\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{1+b^2-2b-a^2}{4}+\frac{a^2-1+2b-b^2}{4}=0$

$\angle JMA = 90°$

$\left\|\overrightarrow{MJ}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2b+1)$

$\overrightarrow{ML}\left(\frac{-1-a+b}{2},\frac{-1-a-b}{2}\right), \overrightarrow{MC}=\left(\frac{1+a+b}{2},\frac{-1-a+b}{2}\right)$

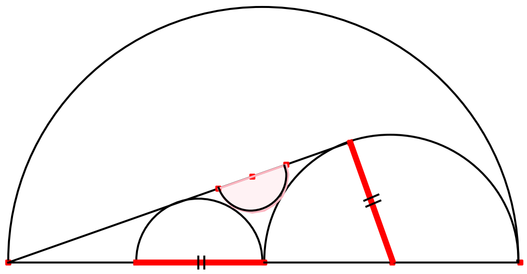
$\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{MC}=\frac{-1+b^2+2a-a^2}{4}+\frac{a^2+1-2a-b^2}{4}=0$

$\angle LMC = 90°$

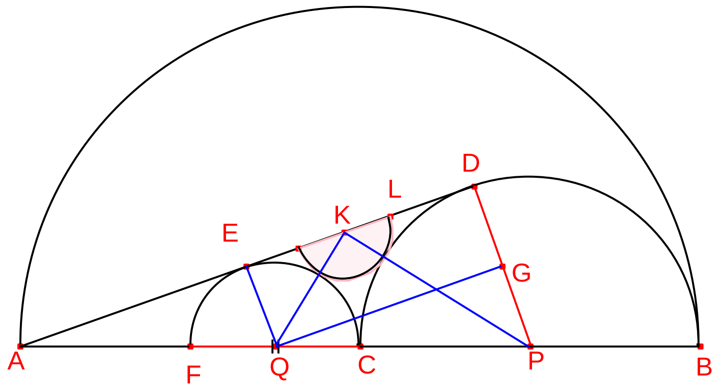
$\left\|\overrightarrow{ML}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+2a+1)$

Aleshores:
$\overline{MJ}+\overline{MC}=\overline{ML}+\overline{MA}$

4132.- La figura està formada per quatre semicercles.
Calculeu la proporció entre l'àrea del menut i l'àrea del gran.



Solució:



Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PB} = \overline{PD} = r$
Siga la semicircumferència de centre Q i radi $\overline{QC} = \overline{QE} = \frac{r}{2}$
Siga la semicircumferència de centre K i radi $\overline{KL} = s$

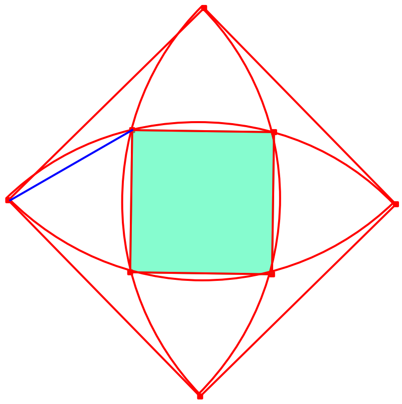
Siga G la projecció de Q sobre $\overline{PD}$
Aplicant el teorema de Pitàogres al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KGP}$:
$\overline{DE} = \overline{GQ} = r\sqrt{2}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEQ}, \overset{\Delta}{ADP}$ són semblants i de raó $1:2$
$\overline{AQ} = \overline{QP} = \frac{3}{2}r$
$\overline{AF} = r$
$\overline{AB} = 4r$, diàmetre del semicercle exterior.
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles triangles rectangles $\overset{\Delta}{KEQ}, \overset{\Delta}{KDP}$

$$\sqrt{\left(s+\frac{r}{2}\right)^2 - \frac{r^2}{4}} + \sqrt{(s+r)^2 - r^2} = r\sqrt{2}$$

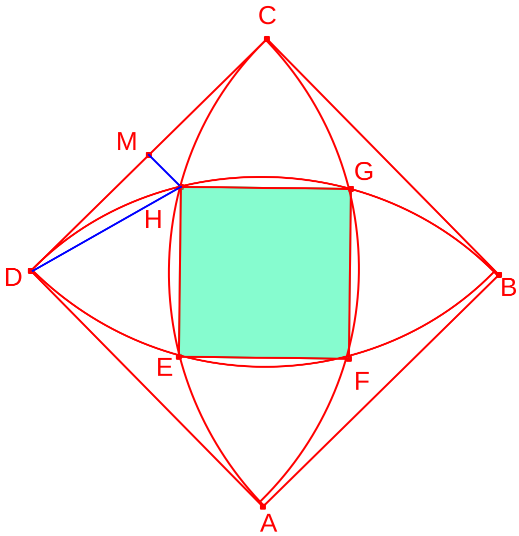
$\sqrt{s^2 + rs} = r\sqrt{2} - \sqrt{s^2 + 2rs}$
Elevant al quadrat i simplificant:
$7s^2 + 12rs - 4r^2 = 0$
Resolent l'equació:
$s = \frac{2}{7}r$
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_s}{S_{2r}} = \frac{\frac{1}{2}\pi s^2}{\frac{1}{2}\pi(2r)^2} = \frac{1}{49}$$

4133.- La figura està formada per dos quadrats i quatre quadrants.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.



Solució:



AB=1

MH=a

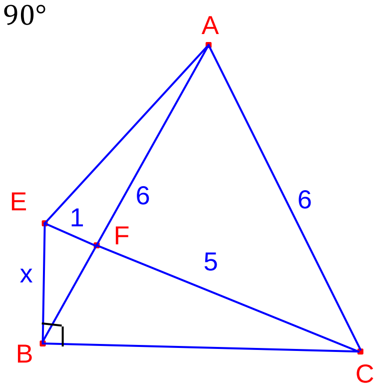
angleMDH=15º

tan 15º=2a=2-sqrt(3)

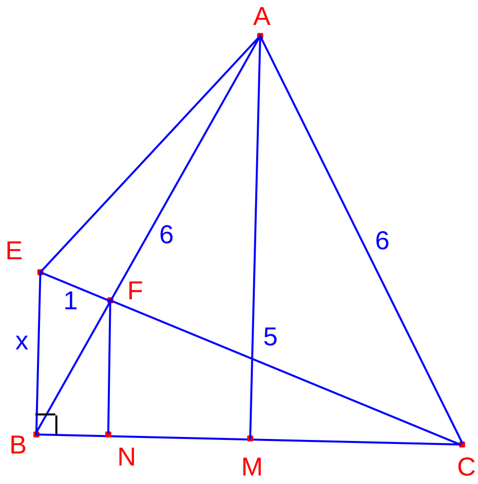
HF=1-2a=-1+sqrt(2)

[EFGH]=(1/2)HF²=2-sqrt(3)

4134.- En la figura $\overline{AB} = AC = 6, EF = 1, CF = 5, \angle EBC = 90°$
Calculeu la mesura del segment $x = \overline{BE}$



Solució:



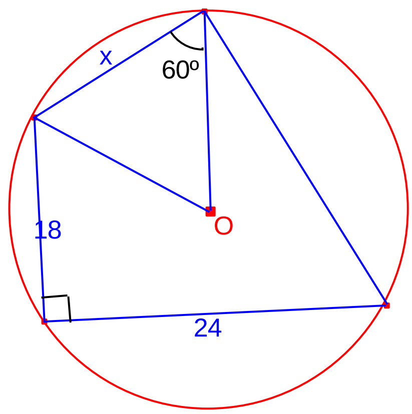
BC=sqrt(36-x²)

BN=(1/6)x
FN=(5/6)x
AM=(5/2)x

teorema Pitàgores AMC
36=(25/4)+(1/4)(36-x²)

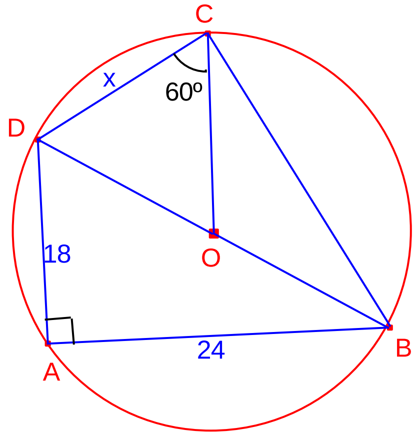
x²=9/2
x=(3/2)sqrt(2)

4135.- La figura està formada per un quadrilàter inscrit en una circumferència.
Calculeu la mesura de la corda x



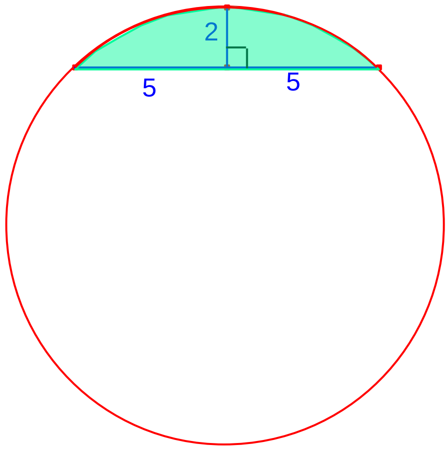
Solució:
Siga el quadrilàter $ABCD$, $\overline{AB} = 24, \overline{AD} = 18, A = 90°, \angle DCO = 60°$

El triangle $\overset{\Delta}{OCD}$ és equilàter.
$\overline{BD}$ és diàmetre de la circumferència.

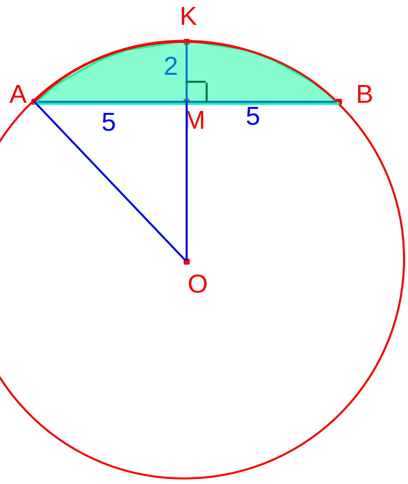


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAB}$
$\overline{BD} = 30$
$x = \overline{CD} = \overline{OD} = 15$

4136.- En la figura calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga la corda $\overline{AB} = 10$
Siga M el punt mig de $\overline{AB}$
Siga $\overline{KM} = 2$ perpendicular a la corda $\overline{AB}$
La recta KM passa pel centre O de la circumferència.
Aplicant la potència de M respecte de la circumferència:



$5 \cdot 5 = 2 \cdot (2R - 2)$

$R = \frac{29}{4}$

$\overline{OM} = \frac{21}{4}$

Siga $\alpha = \angle MOA$

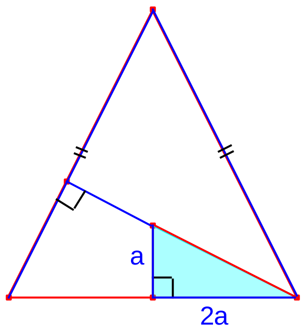
$\tan\alpha = \frac{20}{21}$

$\tan 2\alpha = \frac{840}{41}$

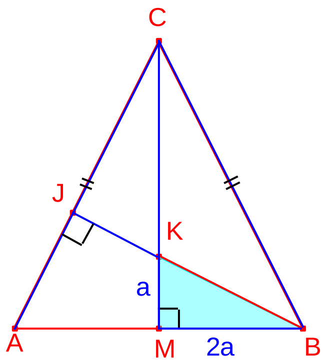
L'àrea del segment circular és:

$$\frac{\arctan\frac{840}{41}}{2}\left(\frac{29}{4}\right)^2 - \frac{21}{4} \cdot 5 = \frac{841}{32}\arctan\frac{840}{41} - \frac{105}{4} \approx 13.7507$$

4137.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea total de la figura.



Solució:



AM=2a

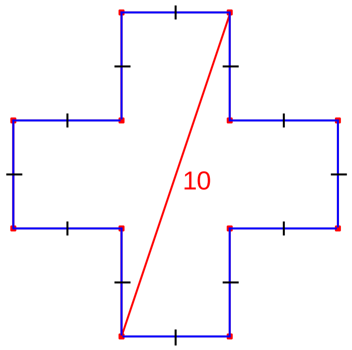
BMK, CMB semblants

Teorema Tales

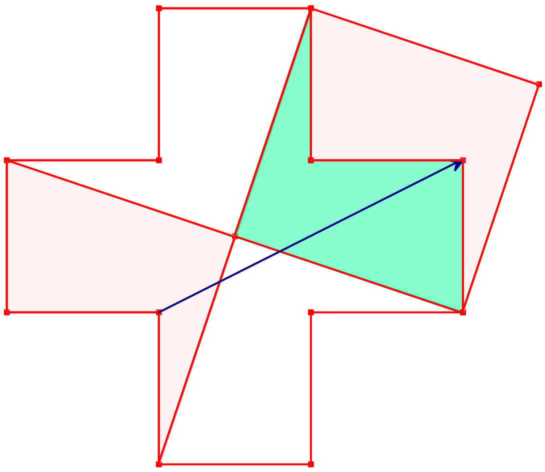
CM=4a

[KMB]/[ABC]=((1/2)2a·a)/((1/2)4a·4a)=1/8

4138.- Calculeu l'àrea de la creu sense utilitzar el teorema de Pitàgores ni arrels quadrades.



Solució:

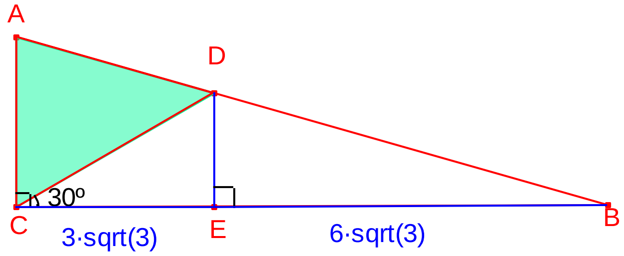


S=50

4139.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACB}, C = 90°$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{CED}, E = 90°, \overline{CE} = 3\sqrt{3}, \overline{EB} = 6\sqrt{3}$

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$



Solució:

aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CED}$
$\overline{CD} = 6, \overline{DE} = 3$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACB}, \overset{\Delta}{DEB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

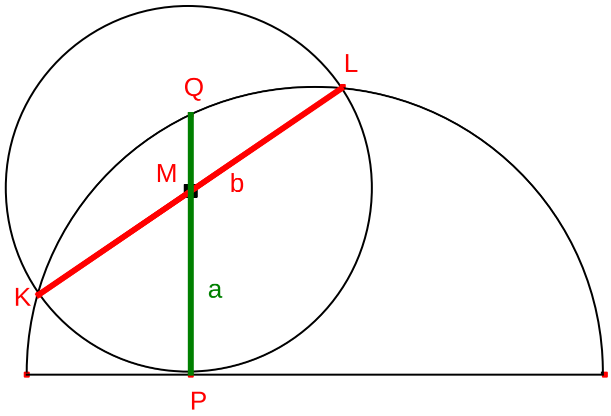
$$\frac{\overline{AC}}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$$

$$\overline{AC} = \frac{9}{2}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{CE} = \frac{1}{2}\frac{9}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \approx 11.6913$$

4140.- En la figura, $\overline{PQ} = a, \overline{KL} = b, M$ el centre de la circumferència.
Calculeu la proporció:
$\frac{b}{a}$



Solució:
Siga la semicircumferència de centre C i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga $\overline{AP} = c, \overline{BP} = 2R - c$
Aplicant la potència de P respecte de la circumferència de centre C:
$c(2R - c) = a^2$
$\angle CML = 90°$
$\overline{KM} = \overline{LM} = \overline{PM} = \frac{b}{2}$
$\overline{PC} = R - c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangles rectangles $\overset{\Delta}{MPC}, \overset{\Delta}{CML}$:
$\frac{b^2}{4} + (R - c)^2 = R^2 - \frac{b^2}{4}$
simplificant:
$c(2R - c) = \frac{b^2}{2}$
$\frac{b^2}{a^2} = 2$
$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$