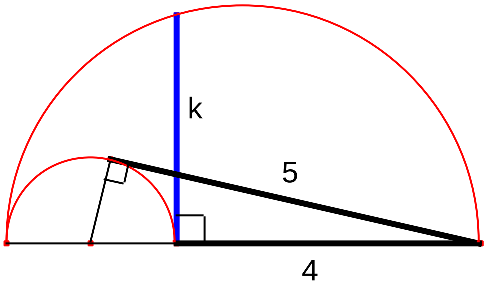
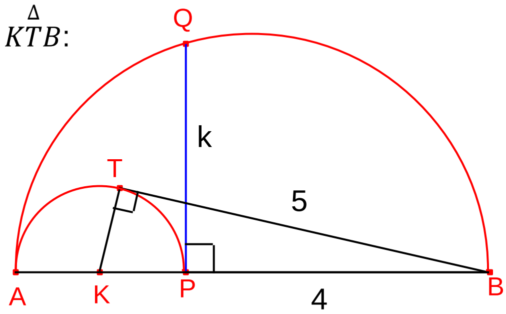
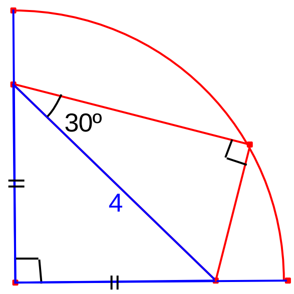
4141.- La figura està formada per dos semicercles tangents.
Calculeu la mesura del segment k



Solució:
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AP} = 2r$
Aplicant la potència de P respecte de la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$
$2r \cdot 4 = k^2$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KTB}$:
$(r+4)^2 = 25 + r^2$
Resolent l'equació:
$r = \dfrac{9}{8}$
$2 \cdot \dfrac{9}{8} \cdot 4 = k^2$
Resolent l'equació:
$k = 3$



4142.- La figura està formada per un quadrant, un triangle dos triangles rectangles d'hipotenusa comuna 4. Calculeu l'àrea del quadrant.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{MOK}, \overset{\Delta}{KLM}$:

$\overline{OK} = \overline{OM} = 2\sqrt{2}, \overline{KL} = 2, \overline{LM} = 2\sqrt{3}$

El quadrilàter $OKLM$ té els angles oposats suplementaris.

Aleshores, és inscrivible.

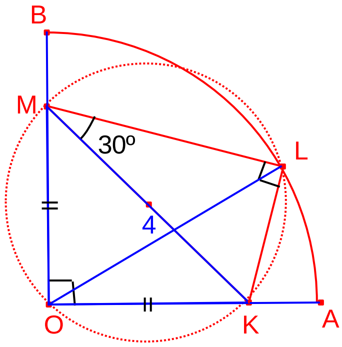
Aplicant el teorema de Tolomeu:

$4r = 2\sqrt{2} \cdot 2 + 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}$

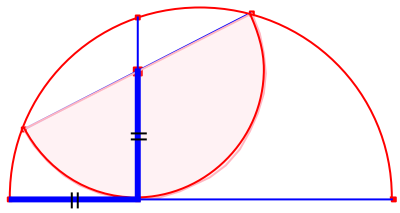
$r = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

L'àrea del quadrant és:

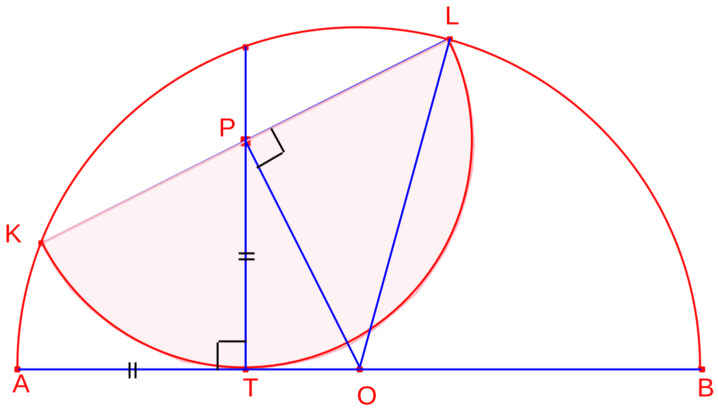
$S_{quadrant} = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 = \pi\left(2 + \sqrt{3}\right)$



4143.- La figura està formada per dos semicercles.
Calculeu la proporció entre les seues àrees.



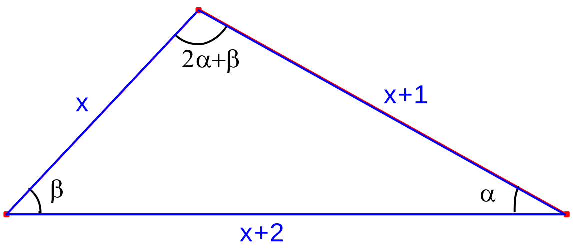
Solució:



Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PL} = \overline{PT} = r$
Siga $\overline{AT} = r, \overline{OT} = R - r$
$\angle OPL = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangles rectangles $\overset{\Delta}{PTO}, \overset{\Delta}{OPL}$:
$r^2 + (R - r)^2 = R^2 - r^2$
Simplificant:
$r = \frac{2}{3}R$
La proporció d'àrees dels dos semicercles és:
$\frac{S_P}{S_O} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{4}{9}$

4144.- En el triangle de la figura calculeu el valor x



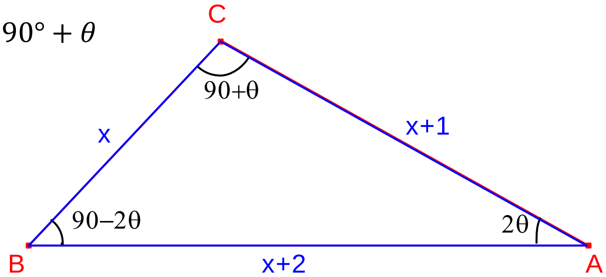
Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$3\alpha + 2\beta = 180°$

$\beta = 90° - \frac{3}{2}\alpha$

Siga $A = \alpha = 2\theta, B = \beta = 90° - 3\theta, C = 2\alpha + \beta = 90° + \theta$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\frac{x+2}{\cos\theta} = \frac{x}{\sin 2\theta}$

$\sin\theta = \frac{x}{2(x+2)}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1)\cos(90° + \theta)$

$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 + 2x(x+1)\sin\theta$

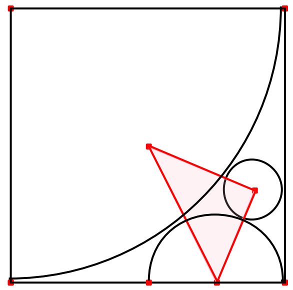
Simplificant:

$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$

Resolent l’equació:

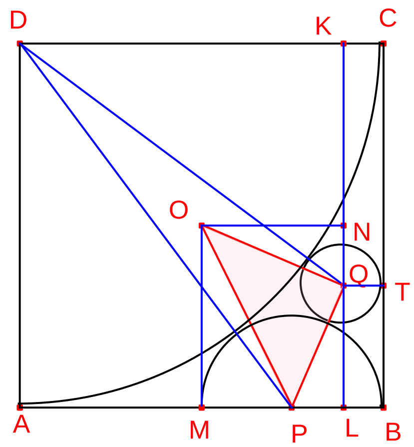
$x = 2$

4145.- La figura està formada per un quadrat de costat 12, un quadrant, un semicercle i un cercle.
Calculeu l'àrea del triangle format pel centre del quadrat i els centres del semicercle i del cercle.

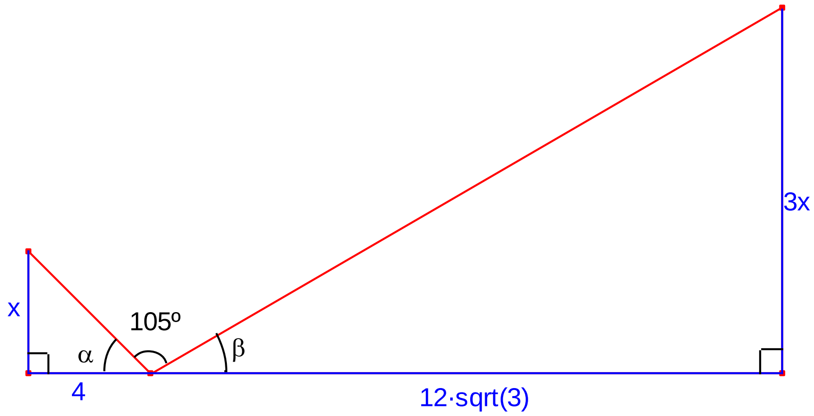


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i costat $\overline{AB} = 12$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PB} = r$
$\overline{DP} = 12 + r, \overline{AP} = 12 - r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$
$(12 + r)^2 = 12^2 + (12 - r)^2$
Resolent l'equació:
$r = 3$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = s$
Siguen K, L les projección de Q sobre els costat $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
Siga N la projecció de O sobre $\overline{LK}$
$\overline{DQ} = 12 + s, \overline{DK} = 12 - s, \overline{PQ} = 3 + s, \overline{PL} = 3 - s$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DKQ}, \overset{\Delta}{PLQ}$:
$\sqrt{48s} + \sqrt{12s} = 12$
Resolent l'equació:
$s = \frac{4}{3}$
$\overline{KQ} = 8, \overline{NQ} = 8 - 6 = 2, \overline{QL} = 4$
$\overline{ON} = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}, \overline{PL} = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és:
$$S_{OPQ} = S_{OPLN} - (S_{PLQ} + S_{ONQ}) = \frac{\frac{14}{3} + \frac{5}{3}}{2} \cdot 6 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{14}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{5}{3}\right) = 11$$



4146.- La figura està formada per dos triangles rectangles.
Calculeu x, α, β



Solució:

$\tan\alpha = \dfrac{x}{4}, \tan\beta = \dfrac{x}{4\sqrt{3}}$

$\alpha + \beta = 75°$

$$\tan 75° = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{4\sqrt{3}}}{1 - \dfrac{x}{4}\cdot\dfrac{x}{4\sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3}$$

Simplificant:

$x^2 + 4(\sqrt{3} - 1)x - 16\sqrt{3} = 0$

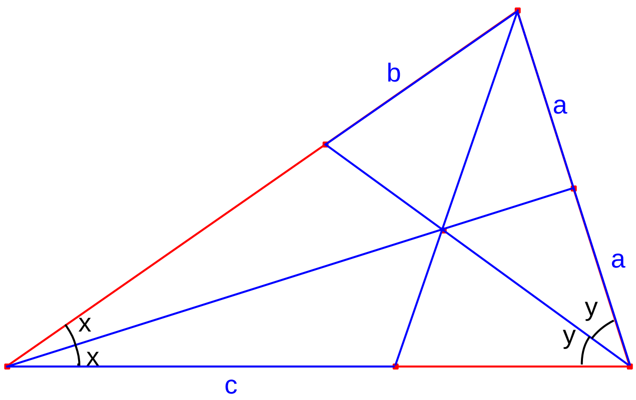
Resolent l'equació:

$x = 4$

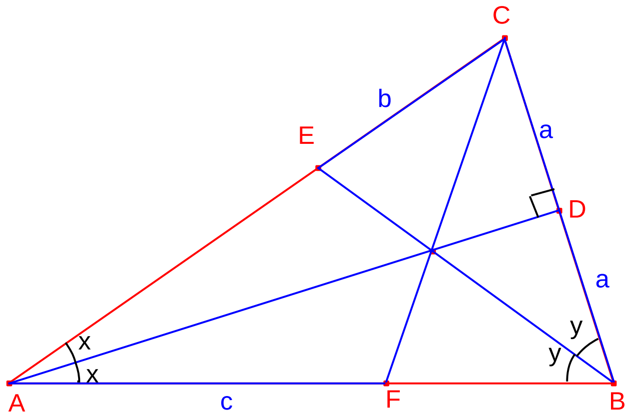
$\tan\alpha = 1, \tan\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Aleshores, $\alpha = 45°, \beta = 30°$

4147.- En la figura $a : b = 4 : 5$
Calculeu la proporció $b : c$



Solució:



b/a=5/4

angleADC=angleADB=90º

AD, BE, CF bisectrius

FB=b, AE=c

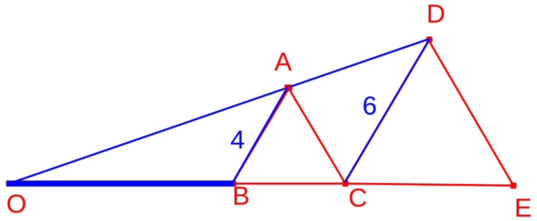
Teorema bisectriu:

b/(2a) = c/(b+c)

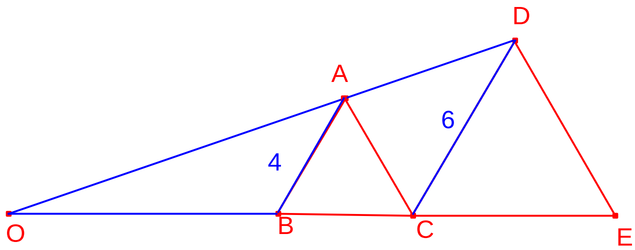
5/8 =c/(b+c)

b/c = 3/5

4148.- En la figura els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{CDE}$ són equilàters.
Calculeu la mesura del segment $\overline{OB}$



Solució:



AB=4

OB=a

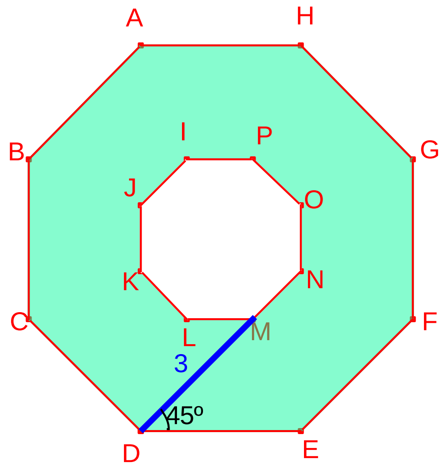
OBA, OCD semblants

Aplicant el teorema de Tales:

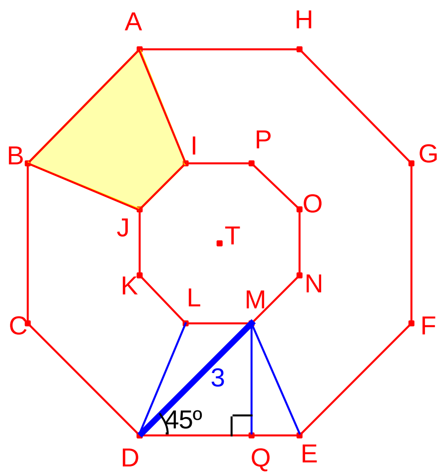
a/4 = (a+4)/6

a=8

4149.- La figura està formada per dos octògons regulars $ABCDEFGH, IJKLMNOP$ amb els costats paral·lels i centre comú. Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga l'octògon regular $IJKLMNOP$ de costat $\overline{IJ} = d$
siga T el centre dels dos octògons.



Siga Q la projecció de M sobre el costat $\overline{DE}$

$$\overline{QM} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{DQ} = \overline{QM} = \frac{c+d}{2}$$

Aleshores,

$$\frac{c+d}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

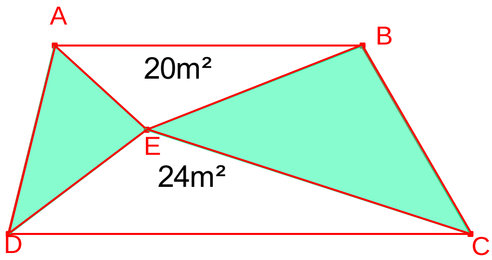
L'àrea ombrejada és igual a vuit vegades l'àrea del trapezi isòsceles $DEML$.

$$S_{ombrejada} = 8 \cdot S_{DEML} = 8 \cdot \frac{c+d}{2} \cdot \overline{QM} = 8 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 36$$

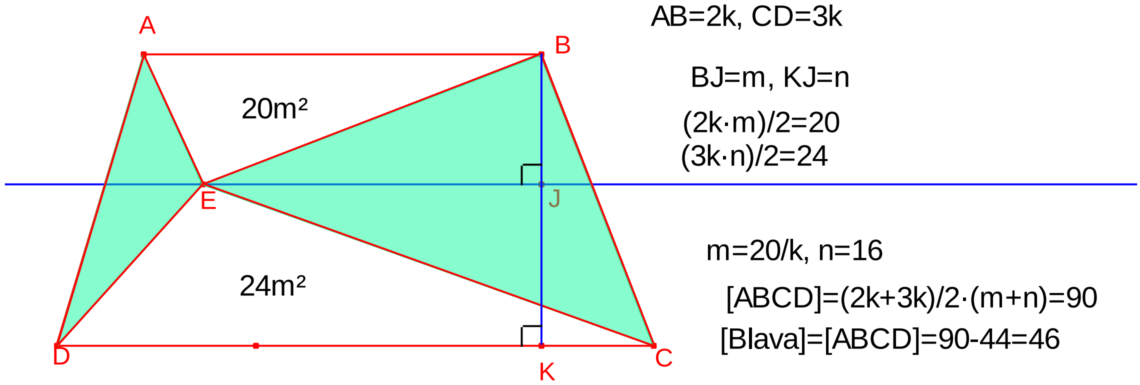
4150.- Donat el trapezi $ABCD$ que els costats paral·lels estan en proporció $\overline{AB} : \overline{CD} = 2 : 3$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{DCE}$ tenen àrees $20\ m^2$ i $24\ m^2$, respectivament.

Calculeu el total d'àrea l'àrea ombrejada.



Solució:



AB=2k, CD=3k

BJ=m, KJ=n

(2k·m)/2=20

(3k·n)/2=24

m=20/k, n=16

[ABCD]=(2k+3k)/2·(m+n)=90

[Blava]=[ABCD]=90-44=46