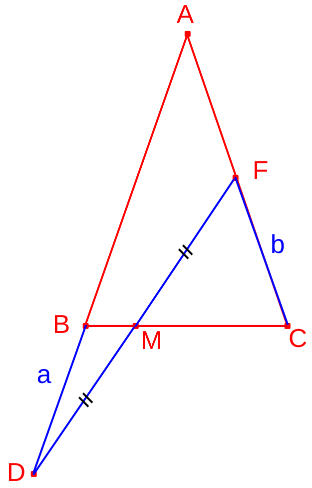
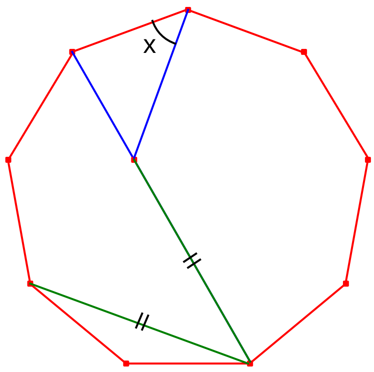


4161.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.
M és un punt del costat $\overline{BC}$ que talla les rectes AB, AC en els punts D, F, respectivament, tal que $\overline{MD} = \overline{MF}$
Calculeu la proporció:
$$\frac{a}{b}$$

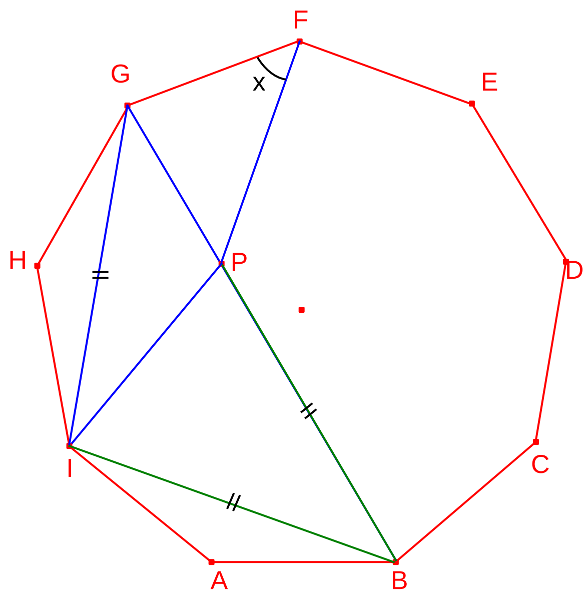
Solució:
Siga $\overline{MD} = \overline{MF} = x$
Siga $\alpha = \angle ACB, \beta = \angle FMC$
Aplicant el teorema dels sinus als triangles $\overset{\Delta}{BDM}, \overset{\Delta}{MCF}$:
$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta}$$
$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
Dividint ambdues expressions:
$$\frac{a}{b} = 1$$

4162.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats.

Calculeu la mesura de l'angle x.



Solució:
Siga el polígon regular $ABCDEFGHI$ de costat $\overline{AB} = c$



$\angle FGB = 80°$
$\angle GIB = 100°, \angle PIB = 70°$
$\angle GIP = 30°$
$\angle IGB = 40°, \angle IPG = 110°$
$\angle IAB = 140°$

Teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABI}$:

$$\frac{\overline{BI}}{\sin 40°} = \frac{c}{\sin 20°}$$

Terorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{GFP}$:

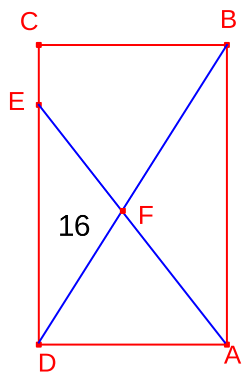
$$\frac{\overline{BI}}{\sin 110°} = \frac{\overline{PG}}{\sin 30°}$$

$$\frac{c}{\overline{PG}} = \frac{\sin 70° \cdot \sin 20°}{\sin 40° \cdot \sin 30°} = \frac{\frac{1}{2}\cos 50°}{\sin 40° \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

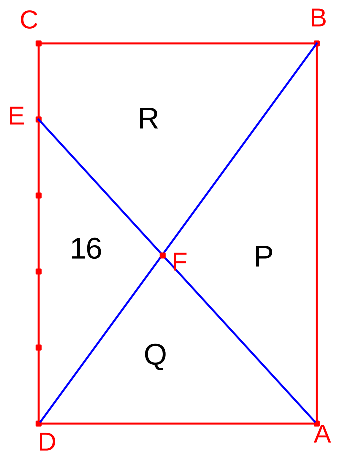
El triangle $\overset{\Delta}{GPF}$ és isòsceles.

$$x = \frac{1}{2}(180° - 80°) = 50°$$

4163.- La figura està formada pel rectangle $ABCD$.
Siga E del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{CE} = \frac{1}{5}\overline{CD}$
Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és 16 calculeu les àrees:
$S_{ABF}, S_{ABF}, S_{ECBF}$



Solució:



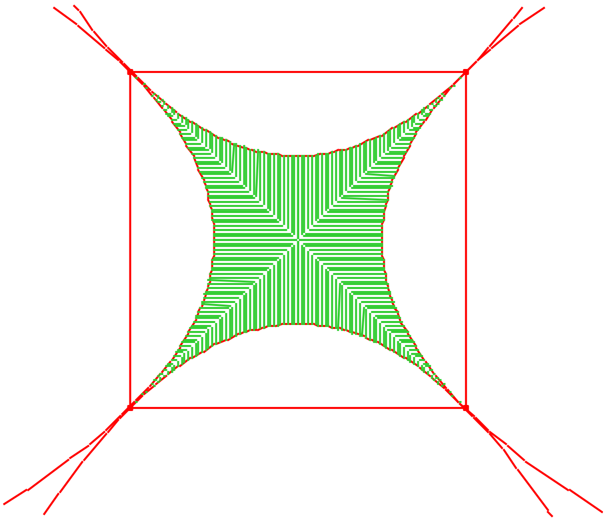
CE=a, DE=4a, AB=5a
P=[ABF], Q=[DFA], R=[ECBF]

P/16 = (5/4)²
P=25

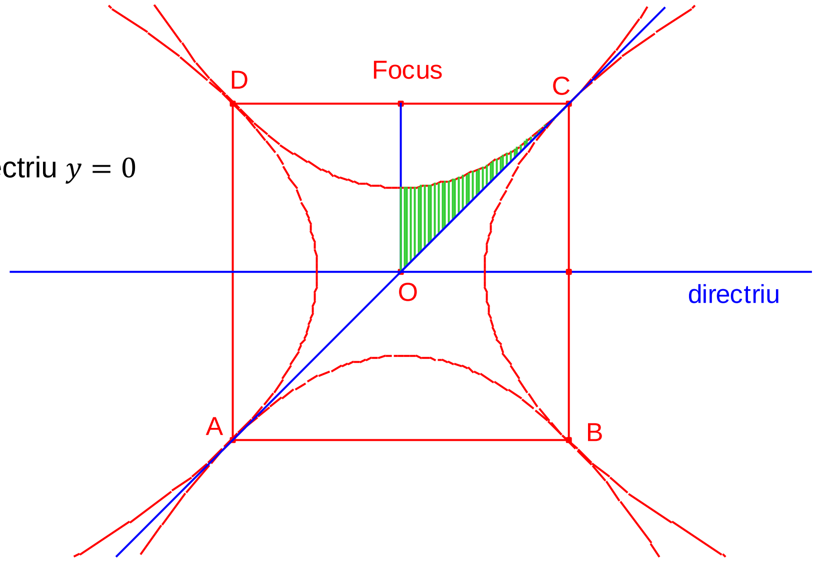
Q/P = DF/BF =4/5
Q=20

R = P+Q-16
R=29

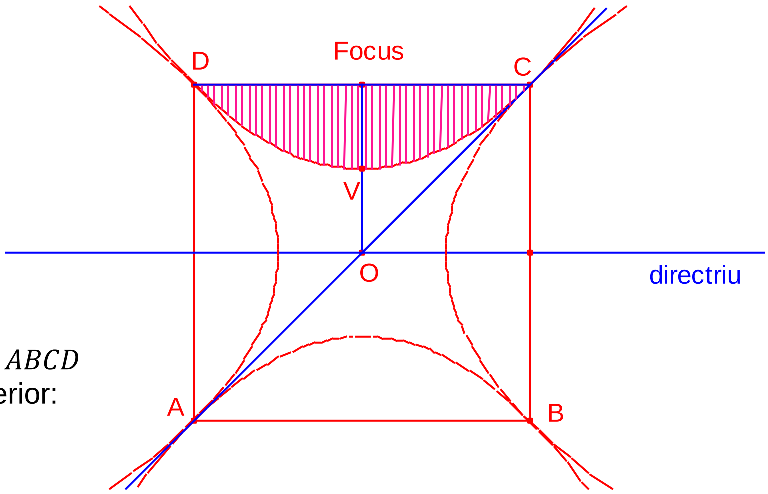
4164.- La figura està formada per un quadrat i quatre paràboles iguals tangents que passen cadascuna per dos vèrtexs consecutius del quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



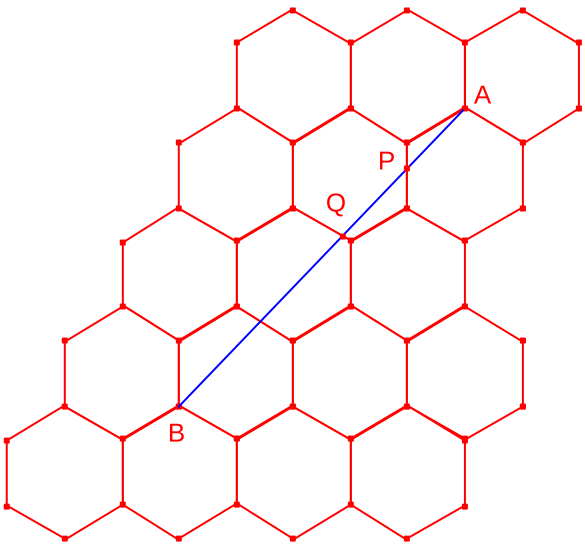
Solució 1:
Siga el quadrat $ABCD$,
$A(-1,-1), B(1,-1), C(1,1), D(-1,1)$
La paràbola superior té focus $F(0,1)$ i directriu $y=0$
La seua equació és:
$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada}=8\cdot\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-x\,dx=$
$=8\cdot\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{4}{3}$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD}=4$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{3}$



Solució 2:
Siga el quadrat $ABCD$,
$A(-1,-1), B(1,-1), C(1,1), D(-1,1)$
El vèrtex de la paràbola és $V\left(0,\frac{1}{2}\right)$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD}=4$
El segment de paràbola ombrejat (Propietat d'Arquimedes) és:
$S=\frac{4}{3}S_{CDE}=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$
L'àrea ombrejada és l'àrea del quadrat $ABCD$ menys quatre vegades el segment anterior:
$S_{ombrejada}=8-4\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$
La proporció d'àrees és: $\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{3}$



4165.- La figura està formada per hexàgons regulars.
Si $\overline{AP} = 210$, calculeu les mesures dels segments $\overline{AP}, \overline{PQ}$



Solució:
Siguen els hexàgons de costat $\overline{KL} = a$

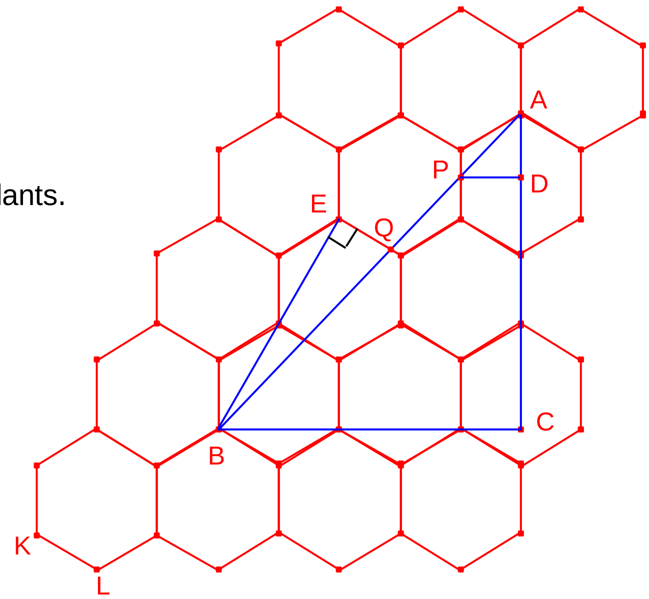
$\overline{BC} = \frac{5\sqrt{3}}{2}a, \overline{AB} = \frac{9}{2}a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCA}$:

$\overline{AB} = a\sqrt{39} = 210$

$a = \frac{70\sqrt{39}}{13}$

$\overline{PD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCA}, \overset{\Delta}{PDA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AP}}{210} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{5\sqrt{3}}{2}}$

$\overline{AP} = 42, \overline{BP} = 210 - 42 = 168$

Siga $\angle ABC = \alpha$

$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{39}}{26}, \cos\alpha = \frac{5\sqrt{13}}{26}$

$\angle EBC = 60°$

$\angle EBQ = 60° - \alpha$

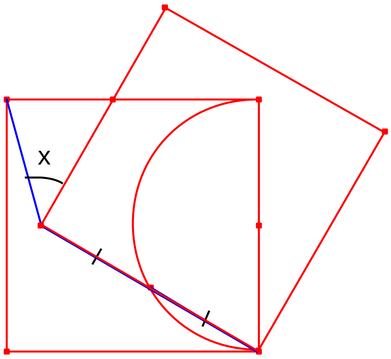
$\overline{BE} = 2a\sqrt{3}$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEQ}$:

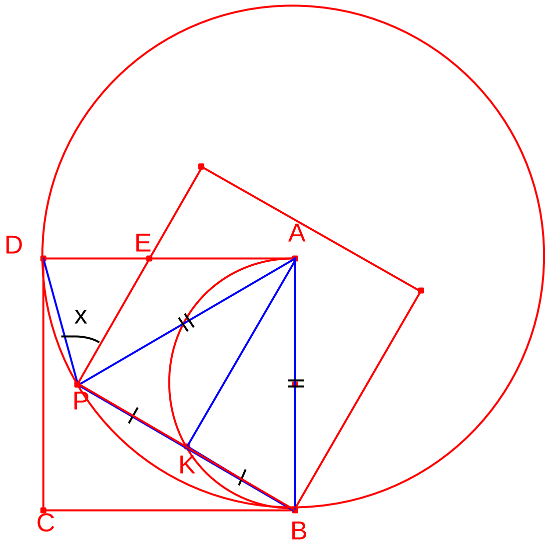
$$\overline{BQ} = \frac{2a\sqrt{3}}{\cos(60° - \alpha)} = \frac{2a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\frac{5\sqrt{13}}{26} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3\sqrt{39}}{26}} = \frac{4\sqrt{39}}{7}a = \frac{4\sqrt{39}}{7} \cdot \frac{70\sqrt{39}}{13} = 120$$

$\overline{PQ} = 168 - 120 = 48$

4166.- La figura està formada per dos quadrats i un semicercle.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



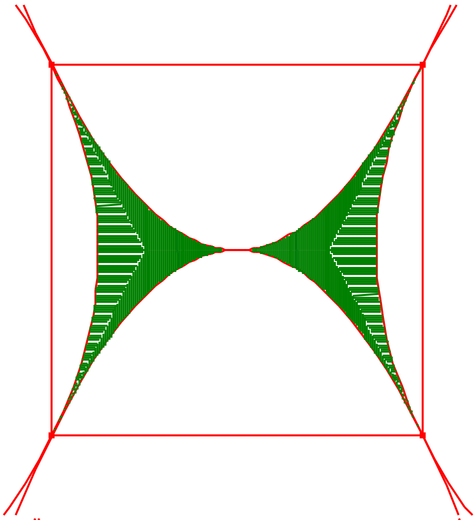
Els triangles PKA, BKA

AP=AD=AB

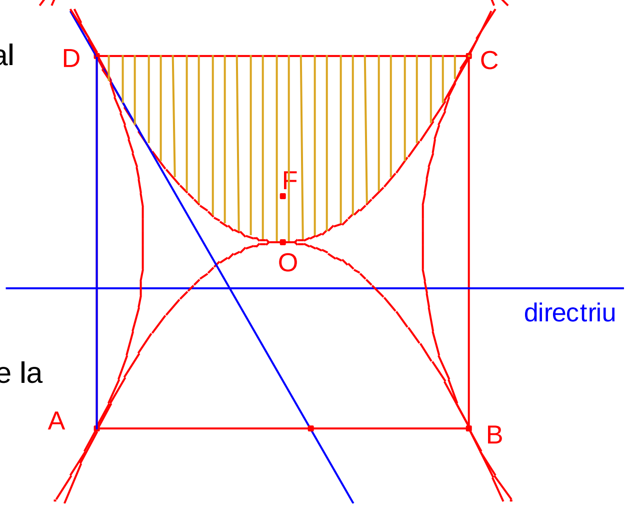
angleDPB=135º

x=angleDPE=135º-90º=45º

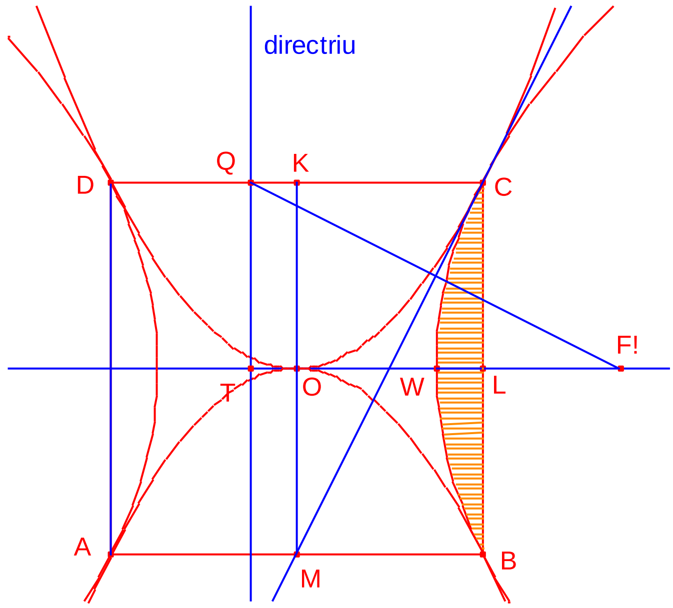
4167.- La figura està formada per un quadrat i quatre paràboles tangents que passen cadascuna per dos vèrtexs consecutius del quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$ de centre O.
Considerem la paràbola superior.
El vèrtex de la paràbola és el centre O del quadrat.
Siga F el focus i la directriu de la paràbola (paral·lela al costat $\overline{AB}$
Siga $\overline{OF} = a$
$\overline{OH} = a$
$\overline{FC} = \overline{FP}$
$1 + a = \sqrt{1 + (1-a)^2}$
Resolent l'equació:
$a = \frac{1}{4}$
La recta tangent a la paràbola superior i la paràbola de la dreta que passa pel punt C és la recta MC
L'àrea del segment parabòlic (aplicant la propietat d'Arquimedes) és:
$S_{superior} = \frac{4}{3} \cdot S_{CDO} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4}{3}$



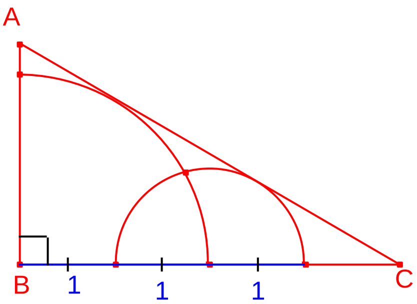
Considerem la paràbola de la dreta.
Siga W el vèrtex de la paràbola, F_1 el focus i la directriu.
$\overline{QT} = 1, \overline{TF_1} = 2$
Siga $\overline{WF} = b$
$\overline{WF_1} = \overline{WT} = 1, \overline{OL} = 1, \overline{OT} = b, \overline{LF_1} = 1 - b$
$\overline{CQ} = \overline{F_1C}$
$1 + b = \sqrt{1 + (1-b)^2}$
Resolent l'equació:
$b = \frac{1}{4}$
L'àrea del segment parabòlic (aplicant la propietat d'Arquimedes) és:
$S_{dreta} = \frac{4}{3} \cdot S_{BCW} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$



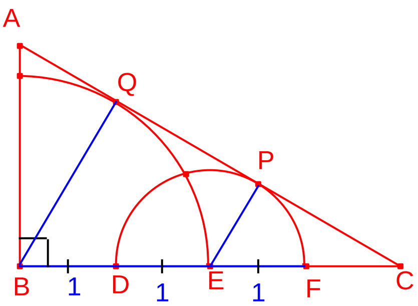
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = S_{ABCD} - \left(2 \cdot S_{superior} + 2 \cdot S_{dreta}\right) = 4 - \left(2 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{1}{6}$$

4168.- La figura està formada per un triangle rectangle i un quadrant i un semicercle en el seu interior.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:
Siga $\overline{CF} = a$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BQC}, \overset{\Delta}{EPC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{2}{3+a} = \frac{1}{1+a}$$

Resolent l'equació:

$a = 1$

$\overline{BC} = 4$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EPC}$:

$\overline{CP} = \sqrt{3}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{EPC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{1} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

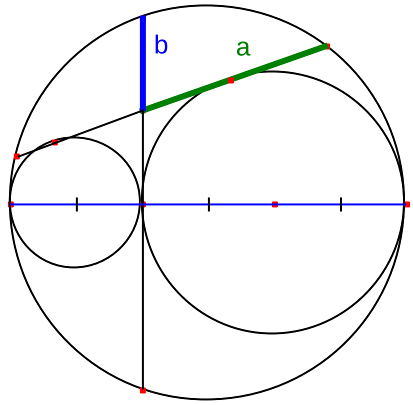
$$\overline{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

4169.- La figura està formada per tres circumferències. S'ha traçar la tangent comuna a les circumferències interiors.
Calculeu la proporció:

$\frac{a}{b}$



Solució:

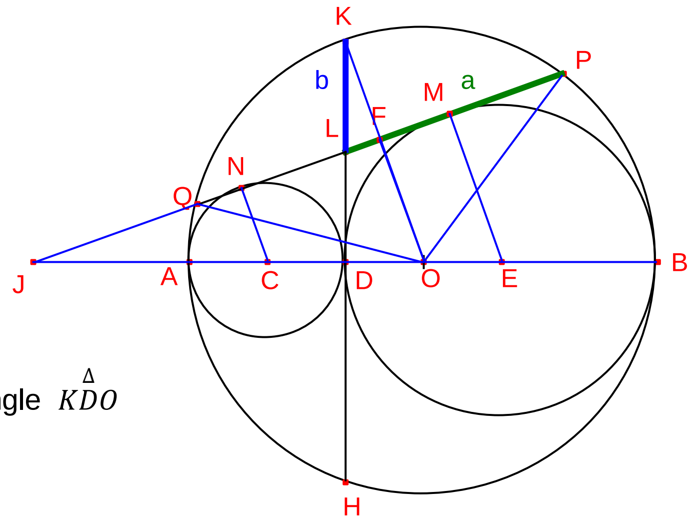
Siguen $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB} = 2r,$

$\overline{AB} = 6r$

$\overline{OD} = r$

Siga J la intersecció de les rectes PQ, AB.

Siga $\overline{JA} = x$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JNC}, \overset{\Delta}{JME}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{2r}{r} = \frac{x + 4r}{x + r}$

Resolent l'equació:

$x = 2r$

$\overline{JN} = 2\sqrt{2}r$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JNC}, \overset{\Delta}{JDL}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DL}}{r} = \frac{4r}{2\sqrt{2}r}$

$\overline{DL} = r\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KDO}$

$\left(b + r\sqrt{2}\right)^2 = 8r^2$

$b = r\sqrt{2}$

$\overline{DH} = 2r\sqrt{2}$

Siga F el punt mig del segment $\overline{PQ}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JNC}, \overset{\Delta}{JFO}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{FO}}{r} = \frac{5r}{3r}, \overline{FO} = \frac{5}{3}r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KDO}$

$$\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{FP} = 2\sqrt{9r^2 - \frac{25}{9}r^2} = \frac{4}{3}\sqrt{14}r$$

Aplicant la potència del punt L respecte de la circumferència exterior:

$a(\overline{PQ} - a) = b \cdot 3b$

$a\left(\frac{4}{3}\sqrt{14}r - a\right) = 6r^2$

$a^2 - \frac{4}{3}\sqrt{14}ra + 6r^2 = 0$

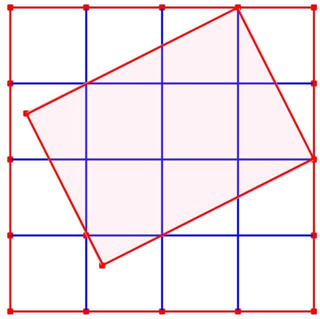
Resolent l'equació:

$a = \frac{2\sqrt{14} + \sqrt{2}}{3}$

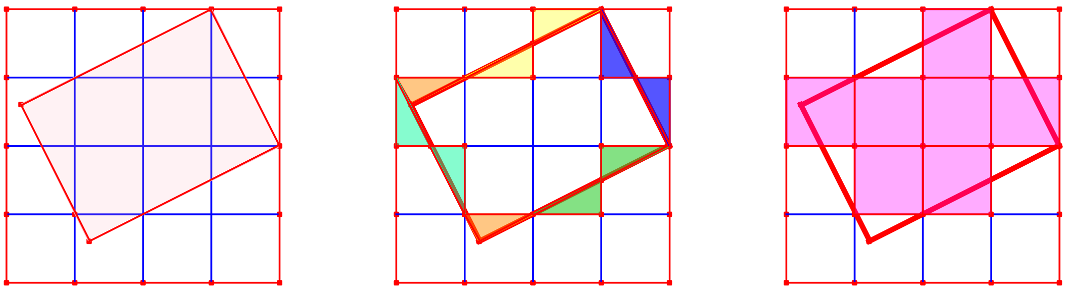
La proporció dels segments és:

$\frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{7} + 1}{3}$

4170.- Calculeu la proporció entre l'àrea del rectangle ombrejat i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:



7/16