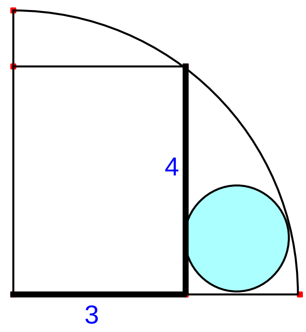
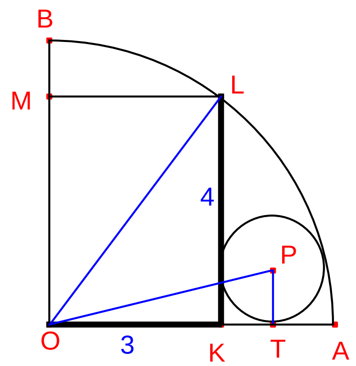
4171.- La figura està formada per un rectangle de costats 3, 4 inscrit en un quadrant i una circumferència tangent al quadrat i a un costat del rectangle.
Calculeu l'àrea del cercle ombrejat.



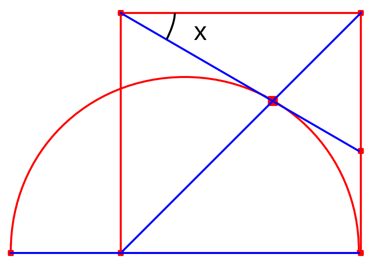
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA}$
Siga el rectangle $OKLM$ de costats $\overline{OK} = 3, \overline{KL} = 4$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKL}$
$\overline{OL} = \overline{OA} = 5$
Siga $\overline{PT} = r$ radi del cercle.
$\overline{OP} = 5 - r, \overline{OT} = 3 + r$

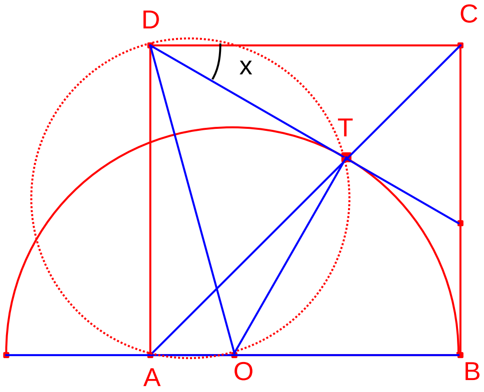
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$(5-r)^2 = r^2 + (3+r)^2$
$r^2 + 16r - 16 = 0$
Resolent l'equació:
$r = 4\left(-2+\sqrt{5}\right)$
L'àrea del cercle és:
$S = \pi\left(4\left(-2+\sqrt{5}\right)\right)^2 = 16\pi\left(9-4\sqrt{5}\right) \approx 2.8012$



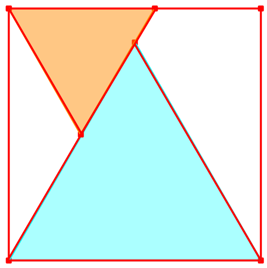
4172.- La figura està formada per un quadrat i un semicercle.
Des d'un vèrtex s'ha traçat una tangent al semicercle en el punt de la diagonal del quadrat..
Calculeu la mesura de l'angle x



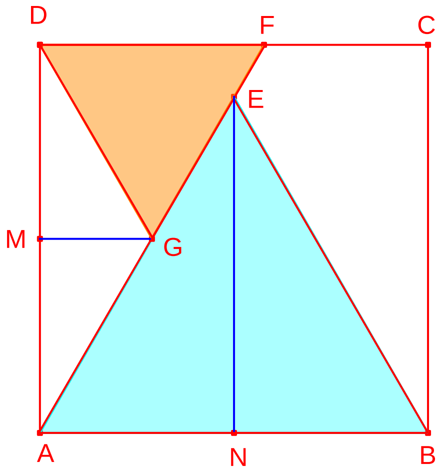
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OB} = 1$
Siga DT la recta tangent al semicercle, T pertany a la diagonal $\overline{AC}$
El quadrilàter $AOTD$ és inscriptible ja que té dos angles oposats rectes.
$\angle DOT = \angle DAT = 45°$
Aleshores:
$\overline{DT} = \overline{OT} = 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OTD}$
$\overline{OD} = \sqrt{2}$
$\overline{OA} = c - 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DAO}$
$c^2 + (c-1)^2 = 2$
Resolent l'equació:
$c = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \overline{OA} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$
Siga $\alpha = \angle ADO$
$\tan\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$
$\alpha = 15°$
$x = 90° - (45° + 15°) = 30°$



4173.- La figura està formada per un quadrat i dos triangles equilàters en el seu interior.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles equilàters.



Solució:



AB=c, DF=a

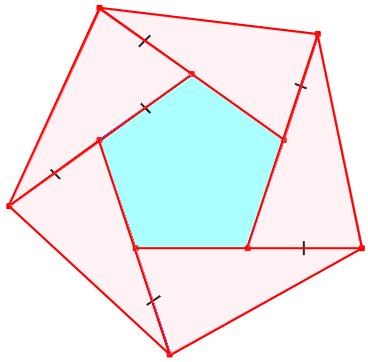
DM=sqrt(3)/2·a

c=a·sqrt(3)

NE=sqrt(3)c/2=(3/2)a

[DFG]/[ABE]=(DM/NE)²=1/3

4174.- Els costats d'un pentàgon regular (blau) s'ha allargat el doble i s'han format cinc triangles (rosa) Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea blava.



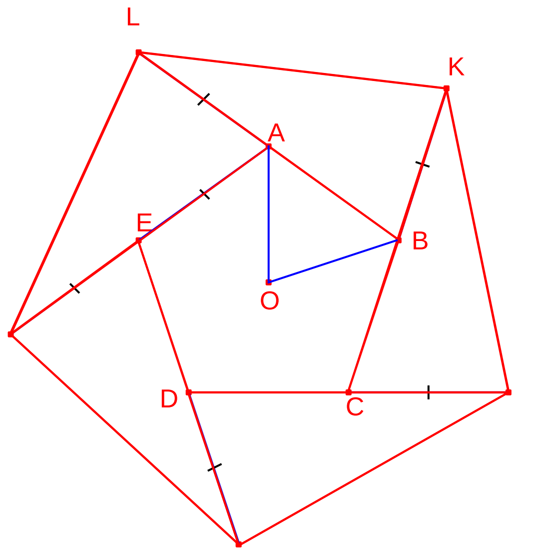
Solució:

Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de centre O i costat

$\overline{AB} = c$

$\overline{OA} = \overline{OB} = R, \angle AOB = 72°$

$$R = \frac{\sin 54°}{\sin 72°}$$



L'àrea del pentàgon és:

$$S_{ABCDE} = 5 \cdot S_{OAB} = \frac{5}{2} c^2 \frac{\sin^2 54}{\sin 72}$$

$\overline{KL} = 2c, \angle LBK = 72°$

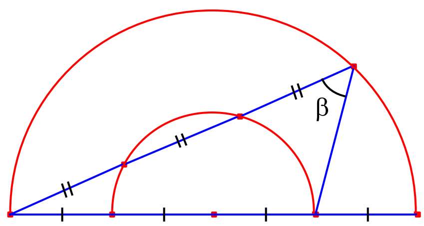
L'àrea rosa és:

$$S_{rosa} = 5 \cdot \frac{1}{2} 2c^2 \cdot \sin 72$$

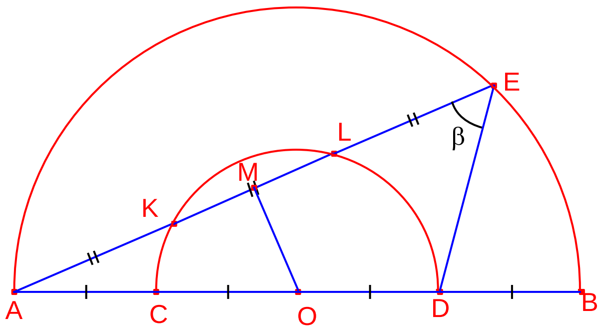
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{rosa}}{S_{ABCDE}} = 2 \frac{\sin^2 72°}{\sin^2 54} = 5 - \sqrt{5}$$

4175.- La figura està formada per dues semicircumferències concèntriques
Calculeu la mesura de l'angle β



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{CD} = 2r$
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 4r$
Siga $\overline{AK} = \overline{KL} = \overline{LE} = 2a$
Siga M el punt mig del segment $\overline{AE}$
Aplicant la potència del punt A respecte de la semicircumferència de diàmetre $\overline{CD} = 2r$:



$2a \cdot 4a = r \cdot 3r$

$a = \frac{\sqrt{6}}{4} r$

Siga $\alpha = \angle MAO$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$

$\cos\alpha = \frac{3a}{2r} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{8}$

Siga $y = \overline{DE}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$

$y^2 = 36a^2 + 9r^2 - 2 \cdot 6a \cdot 3r \cdot \frac{3\sqrt{6}}{8}$

$y^2 = 36\frac{3}{8}r^2 + 9r^2 - 2 \cdot 6\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot 3r^2 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{8}$

$y = \frac{3}{2} r$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$

$\frac{3r}{\sin\beta} = \frac{\frac{3}{2}r}{\sin\alpha}$

$\frac{3r}{\sin\beta} = \frac{\frac{3}{2}r}{\frac{\sqrt{10}}{8}}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{4}$

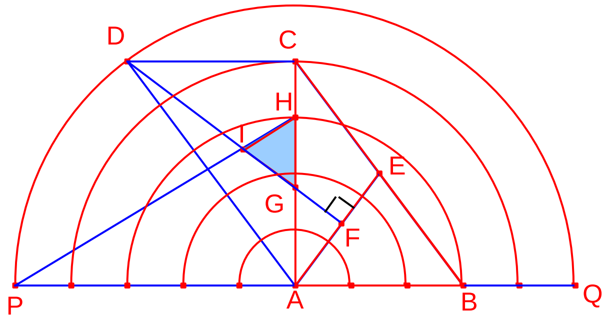
$\beta = \arcsin\frac{\sqrt{10}}{4} \approx 52°\,14'20''$

4176.- Els radis dels cinc semicercles són 1, 2, 3, 4, 5, respectivament.

$ABCD$ és un paral·lelogram.

$\overline{AE} = \overline{BE}$

Calculeu les proporcions entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{GHI}$ i $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:

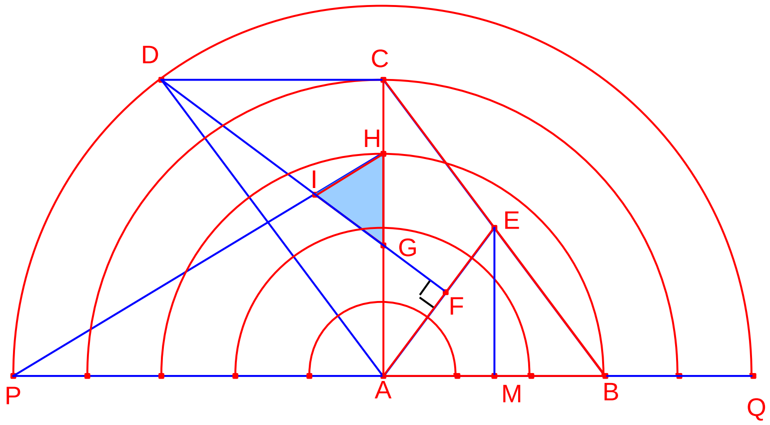
AB=3, AC=4, BC=5, AB=5

angleABC=x

anglePHA=y

tan x= 4/3, tan y=5/3

angleDAE=180º-2x



AF=5·-cos(2x)=7/5

AG=AF·5/4=7/4

GH=5/4

Teorema sinu GHI

(5/4)/sin(x+y)=GI/sin y

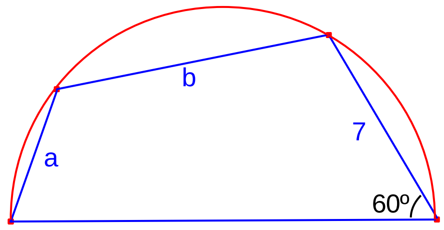
GI=125/108

[GHI]=(1/2)(125/108)(5/4)(4/5)=125/216

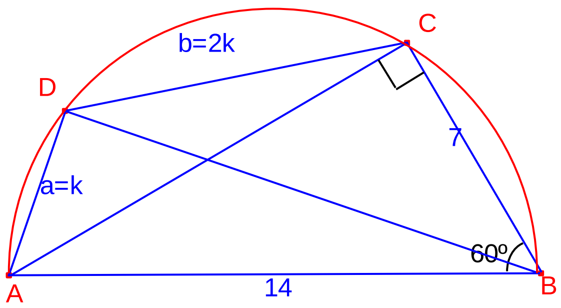
[ABC]=(1/2)3·4=6

[GHI]/[ABC]=125/1296

4177.- La figura està formada per un semicercle i un quadrilàter inscrit, un dels costats és el diàmetre.
Si $a : b = 1 : 2$, calculeu $a \cdot b$



Solució:

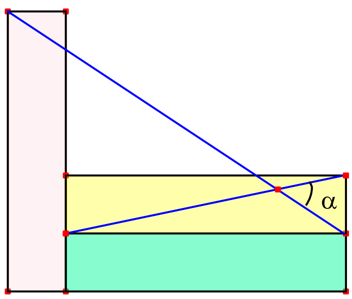


AB=2·BC=17
BD=sqrt(196-k²)
AC=7·sqrt(3)

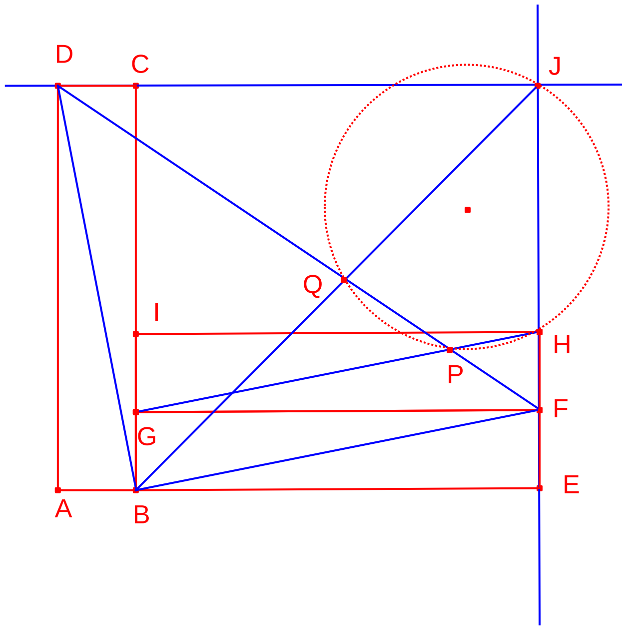
Teorema de Tolomeu:
7k+28k=7·sqrt(3)·sqrt(196-k²)
k²=21

a·b=2k²=42

4178.- La figura està formada per tres rectangles iguals.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:



BEJC quadrat

angle IHG=x

angle DBF=90º, BD=BF

angle BDF=45º

angleDBG=45º+x

angleJQP=90º-x

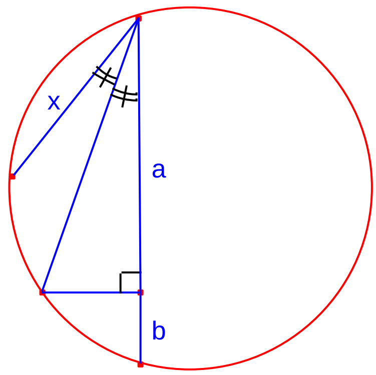
anglePHJ=90º+x

PHJQ cíclic

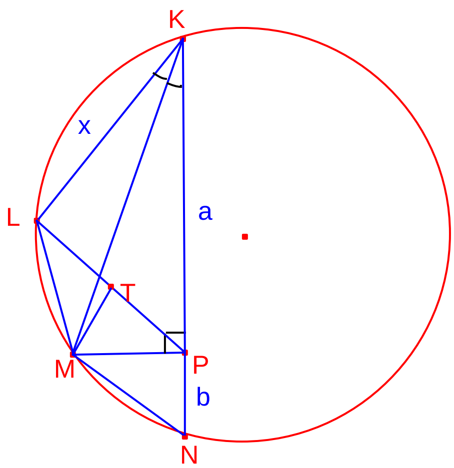
angleQPH=180º-45º=45º

angleHPF=45º

4179.- La figura està formada per una circumferència i tres cordes.
Calculeu la mesura de x en funció de a, b



Solució:



angleLKM=MKN=w

LM=MN=y

KM=c, LN=d

c=a/cos w

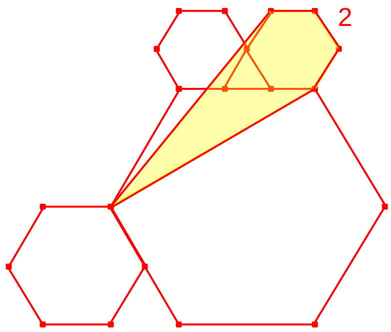
d/2=y·cos w

Teorema Tolomeu KLMN

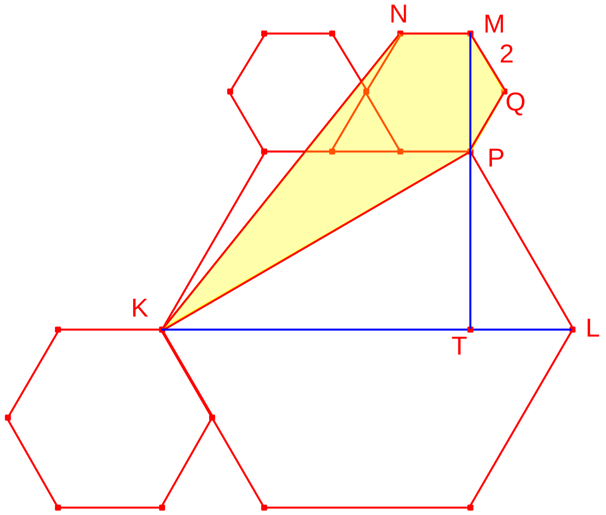
y(a+b)+yx=cd=2ya

x=a-b

4180.- La figura està formada per quatre hexàgons regulars.
Els hexàgons menuts tenen costat 2.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



Siga $\overline{MQ} = 2$
$\overline{PL} = 6$
$\overline{MP} = 2\sqrt{3}$

Siga T la projecció de P sobre $\overline{KL}$
$\overline{TL} = \frac{1}{2}\overline{PL} = 3, \overline{KL} = 9$
$\overline{PT} = 3\sqrt{3}$
$\overline{MT} = 5\sqrt{3}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQM}$ és igual a l'àrea del triangle equilàter de costat 2.

$$S_{KPQMN} = S_{KTMN} - S_{KTP} + S_{PQM} = \frac{9+2}{2}5\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2 = 15\sqrt{3}$$