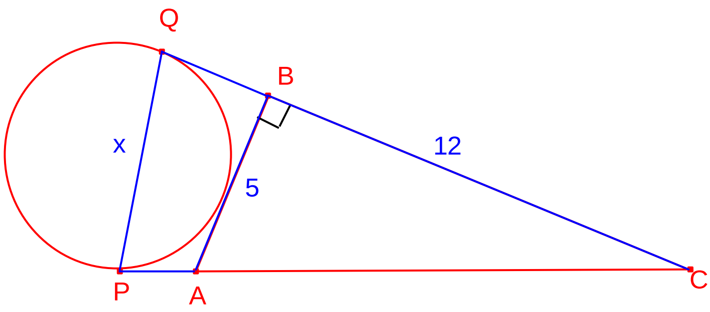
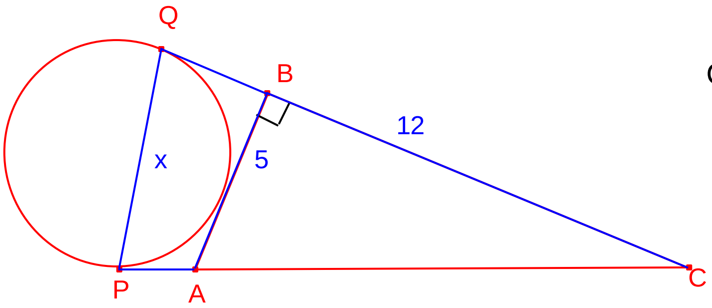
Problemes de Geometria per a l'ESO 419

4181.- En la figura calculeu la mesura del segment $x = \overline{PQ}$



Solució:



AC=13

CP=CQ=(5+12+13)/2=15

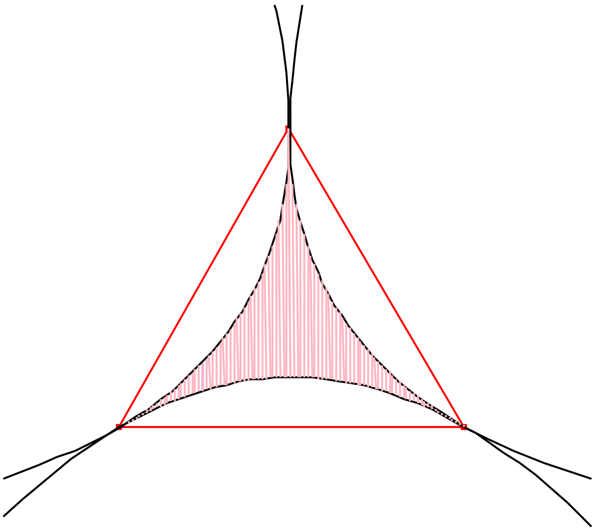
cos C=12/13

Teorema cosinus PCQ

$x^2=15^2+15^2-2\cdot 15^2(12/13)$

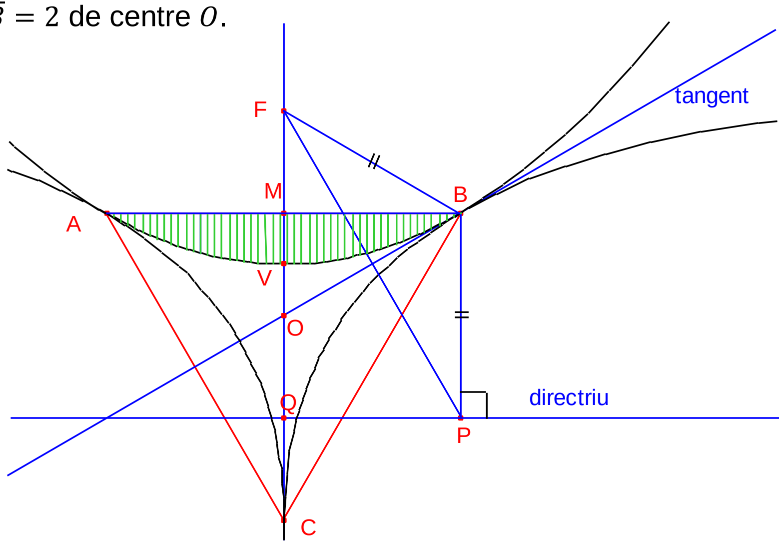
x=(15/13)sqrt(26)

4182.- La figura està formada per un triangle equilàter i tres paràboles iguals tangents en els vèrtexs.
Calculeu l'àrea afitada pels tres paràboles.



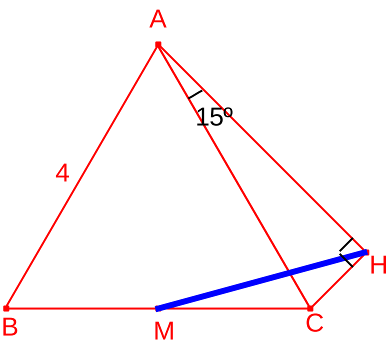
Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 2$ de centre O.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga F el focus de la paràbola superior.
Considerem la directiu de la paràbola superior.
Siga V el vèrtex de la paràbola superior.
$\overline{FV} = \overline{FQ}$
La recta tangent a la paràbola superior en el punt B passa pel centre O
Siga P de la directriu paràbola superior tal que $\overline{BF} = \overline{BP}$
OB és mediatriu de $\overline{PF}$
Aleshores, $\angle FBM = 30°$

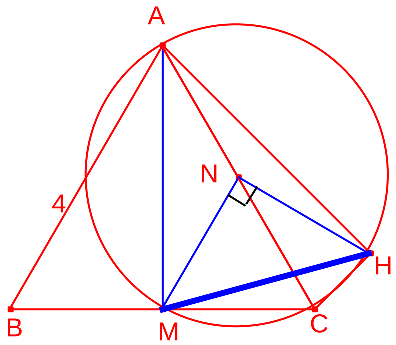


$\overline{FM} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \overline{BF} = \overline{BP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\overline{FQ} = \sqrt{3}$
$\overline{FV} = \overline{FQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\overline{MV} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$
Aplicant la propietat d'Arquimedes, l'àrea del segment parabòlic superior és:
$S_{segment} = \frac{4}{3} S_{ABV} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = S_{ABC} - 3 \cdot S_{segment} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 - 3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

4183.- La figura està formada per un triangle equilàter de costat 4 i un triangle rectangle sobre un costat del equilàter amb un angle agut de 15º. Calculeu la mesura del segment $\overline{MH}$



Solució:



AMCH cíclic

angleMAH=45º

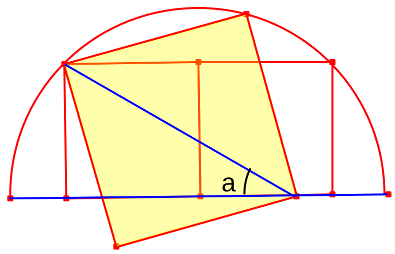
N punt mig AC, centre de la circumferència

NM=NH=2,

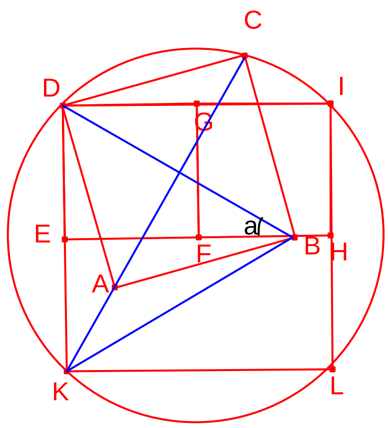
angleMNH=90º

MH=2·sqrt(2)

4184.- La figura està formada per tres quadrats (dos d'ells iguals i un semicercle.
Calculeu la mesura de l'angle a



Solució:



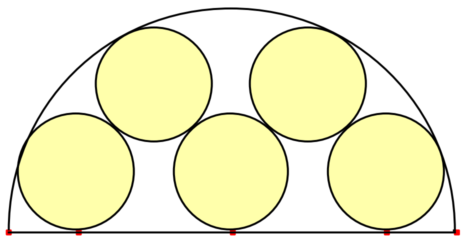
angleEDA=angleABE=b
a+b=angleABD=45º

BD=BK
angleKB=angleKDN=45+b
angleDBK=2a

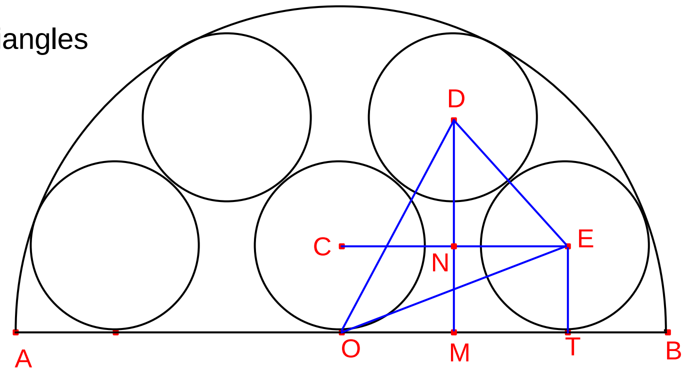
angeDCK=45º,
angleDCA=45º
C, A, K alineats.

triangles CBK, CDK iguals
angles KDC=angleKBC
90º+b=45º+2a
2a-b=45º
a=30º

4185.- La figura està formada per cinc cercles iguals i un semicercle.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del semicercle.



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siguen les circumferències de centre C, D, E i radi $\overline{CO} = \overline{ET} = r$
Siguen M, N els punts migs dels segments $\overline{OT}, \overline{CE}$
Siguen $\overline{OT} = a, \overline{ND} = b$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OTE}, \overset{\Delta}{DNE}, \overset{\Delta}{OMD}$:



$(R-r)^2 = a^2 + r^2$

$4r^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$

$(R-r)^2 = (b+r)^2 + \frac{1}{4}a^2$

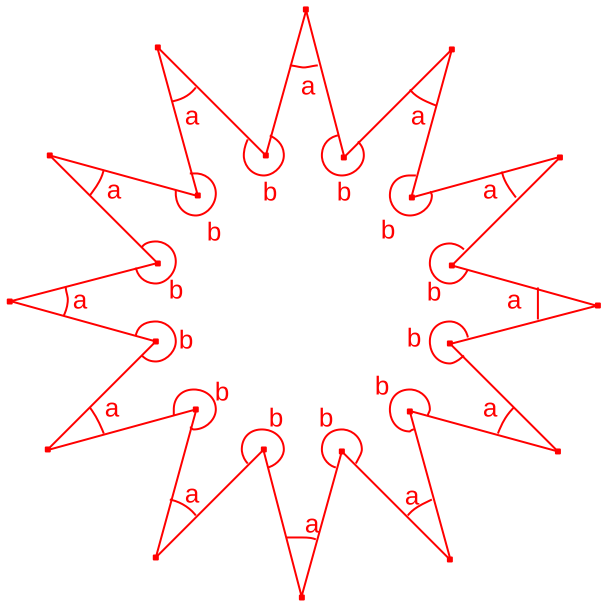
Simplificant:
$14r^3 - 3Rr^2 + 4R^2r + R^3 = 0$
Resolent l'equació:

$$\frac{r}{R} = \frac{-1+2\sqrt{2}}{7}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{semicercle}} = \frac{5 \cdot r^2}{\frac{1}{2}R^2} = 10 \cdot \frac{9-4\sqrt{2}}{49} \approx 0.6823$$

4186.- El polígon té 24 costats iguals que mesuren 2.
L’angle b és igual a 10 vegades l’angle a
Calculeu l’àrea del polígon.



Solució:
$b = 10a$

$\angle ACE = 150°$

$\angle BCA = \angle DCE = 90° - \frac{1}{2}a$

$b = 150° + 180° - a$

$a + b = 330°$

Aleshores:

$a = 30°$

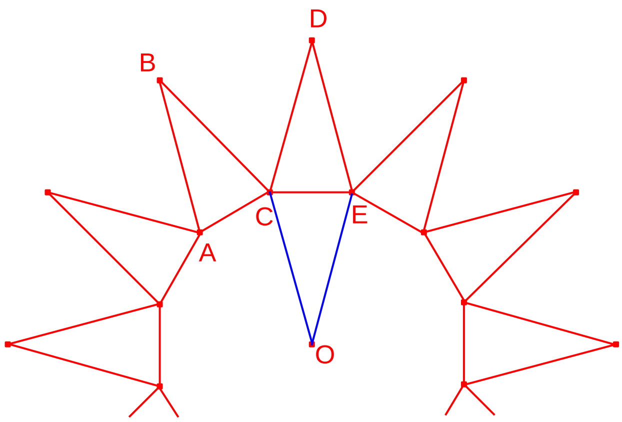
$\angle COE = 30°$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{COE}$ són iguals.

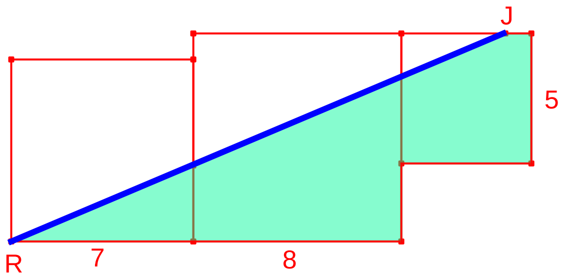
$\overline{OC} = 2$

L’àrea del polígon és:

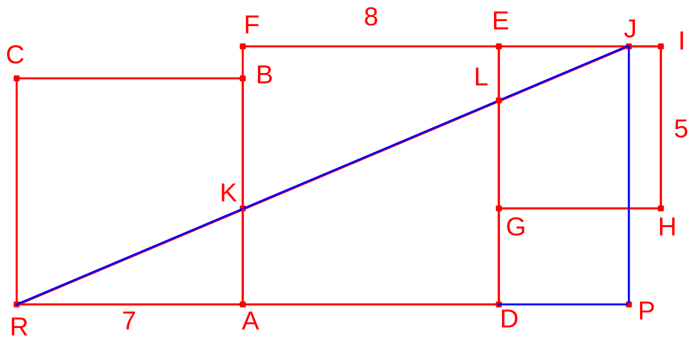
$S = 24 \cdot S_{CDE} = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 30° = 24$



4187.- La figura està formada per tres quadrats de costats 7, 8, 5.
El segment $\overline{RJ}$ divideix la figura en dues partes d'igual àrea.
Calculeu la mesura del segment $\overline{RJ}$



Solució:
Siga el quadrat $RABC$ de costat $\overline{RA} = 7$
siga el quadrat $ADEF$ de costat $\overline{AD} = 8$
Siga el quadrat $GHIE$ de costat $\overline{GH} = 5$



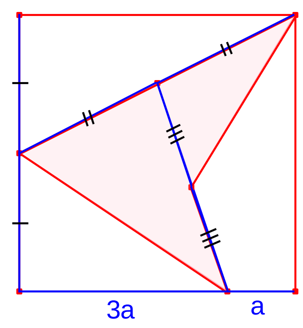
Siga $\overline{AK} = a, \overline{DL} = b$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{RAK}, \overset{\Delta}{ADL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{b}{a} = \frac{15}{7}, \qquad b = \frac{15}{7}a$
$\overline{EL} = 8 - b = 8 - \frac{15}{7}a$
Siga $\overline{EJ} = c$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{RAK}, \overset{\Delta}{JEL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c}{7} = \frac{8 - \frac{15}{7}a}{a}$$
$$c = \frac{56 - 15a}{a}$$
L'àrea del polígon $RDGHIJ$ és la meitat de l'àrea de la figura:
$$S_{RDGHIJ} = \frac{1}{2}(47 + 64 + 25) = 69$$
$$69 = S_{RDGHIJ} = S_{RAK} + S_{ADLK} + S_{GHIE} - S_{JEL}$$
$$69 = \frac{7a}{2} + \frac{a + \frac{15}{7}a}{2} \cdot 8 + 25 - \frac{1}{2}\left(8 - \frac{15}{8}a\right)\left(\frac{56 - 15a}{a}\right)$$
Simplificant:
$$\frac{224}{a} = 76$$
$$a = \frac{56}{19}$$
$$c = 4$$
Siga P la projecció de J sobre la recta RA.
$\overline{RP} = 7 + 8 + 4 = 19, \overline{JP} = 8$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{RPJ}$
$$\overline{RJ} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17} \approx 20.6155$$

4188.- En la figura calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.

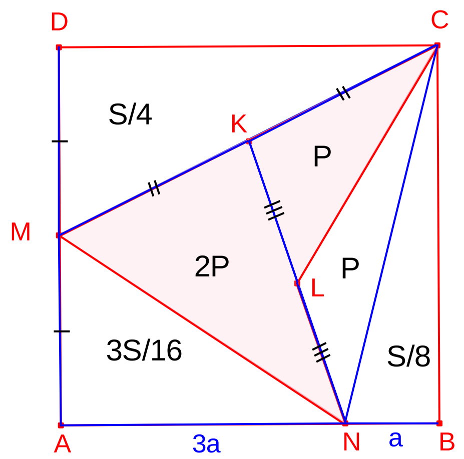


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ d'àrea S.

$S_{DMC} = \frac{1}{4}S$

$S_{NBC} = \frac{1}{8}S$

$S_{MAN} = \frac{3}{16}S$



Siga P l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLC}$
Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura tenen àrees iguals.

$S_{LNC} = S_{KLC} = P$

$S_{MKN} = S_{CKN} = 2P$

$S_{MNC} = 4P = S - \left(\frac{3}{16}S + \frac{1}{8}S + \frac{1}{4}S\right)$

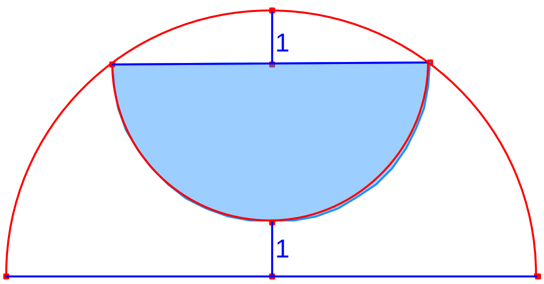
Resolent l'equació:

$P = \frac{7}{64}S$

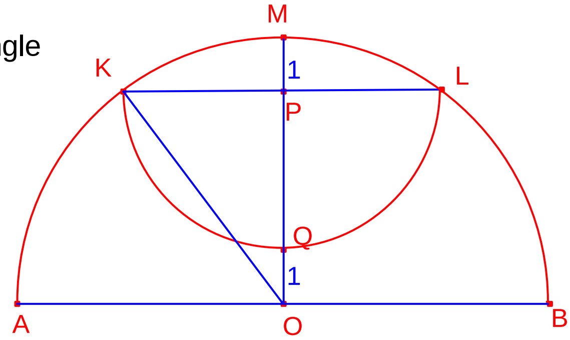
La proporció d'àrees és:

$\frac{S_{MNLC}}{S_{ABCD}} = \frac{3P}{S} = \frac{21}{64}$

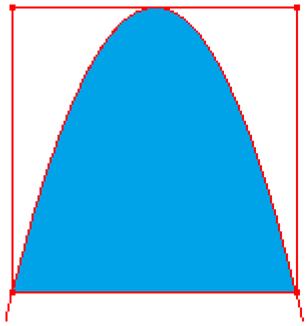
4189.- La figura està formada per dos semicercles.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos semicercles.



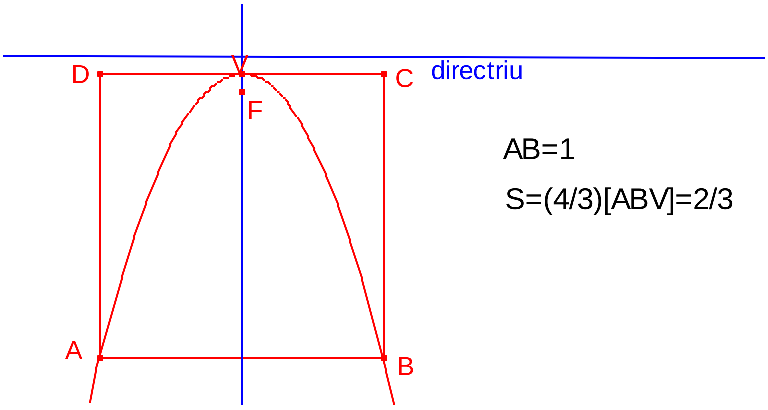
Solució:
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PK} = \overline{PQ} = r$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OM} = \overline{OK} = 2 + r$
$\overline{OP} = 1 + r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPK}$:
$(2 + r)^2 = r^2 + (1 + r)^2$
Simplificant:
$r^2 - 2r - 3 = 0$
Resolent l'equació:
$r = 3$
La proporció entre les àrees dels dos semicercles és:
$$\frac{S_P}{S_O} = \left(\frac{r}{2 + r}\right)^2 = \frac{9}{25}$$



4190.- Una paràbola passa pels vèrtexs inferiors d'un quadrat i és tangent al costat superior.
Calculeu la proporció entre l'àrea del segment parabòlic i l'àrea del quadrat.



Solució:
Aplicarem la propietat d'Arquimedes:



AB=1

S=(4/3)[ABV]=2/3