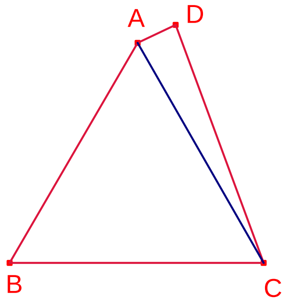
Problemes de Geometria per a l'ESO 42

411.- Tres costats consecutius d'un quadrilàter són iguals i formen dos angles de 60º i 70º.
Determineu els altres angles del quadrilàter.
KöMaL, K298

Solució:

Siga ABCD el quadrilàter tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, $B = 60º$, $C = 70º$.



Si $\overline{AB} = \overline{BC}$, $B = 60º$ el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.

Aleshores, $\angle BCA = 60º$ i $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Per tant, $\angle ACD = 70 - 60º = 10º$.

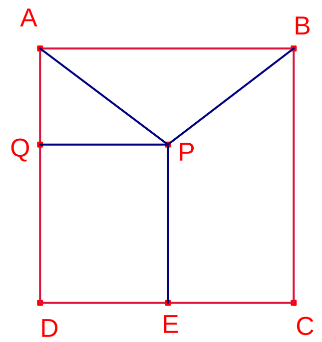
El triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és isòsceles ja que $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{BC}$.

Aleshores, $\angle CAD = \angle ADC = \dfrac{180º - 10º}{2} = 85º$.

Aleshores, $A = 60º + 85º = 145º$, $D = 85º$.

412.- Siga el quadrat ABCD de costat 28. Siga el punt P interior del quadrat i E el costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{PE}$ és perpendicular al costat $\overline{CD}$ i $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PE}$. Calculeu la mesura del segment $\overline{PA}$.

Solució 1:



Siga $\overline{AB} = 28$ costat del quadrat.

Siga $a = \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PE}$.

Siga Q la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.

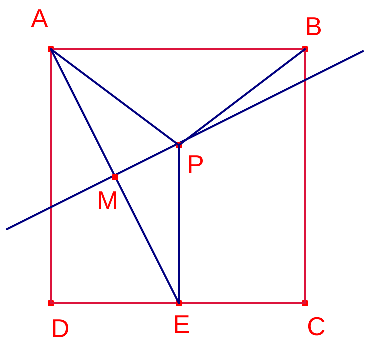
$\overline{PQ} = \overline{DE} = 14$. $\overline{AQ} = 28 - a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$a^2 = 14^2 + (28-a)^2$. Resolent l'equació:

$a = \frac{35}{2}$.

Solució 2:



$\overline{AD} = 28$, $\overline{DE} = 14$.

Com que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PE}$, P pertany a la mediatriu del segment $\overline{AE}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AE}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\overline{AE} = \sqrt{14^2 + 28^2} = 14\sqrt{5}$. $\overline{ME} = \frac{\overline{AE}}{2} = 7\sqrt{5}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{EMP}$ són semblants.

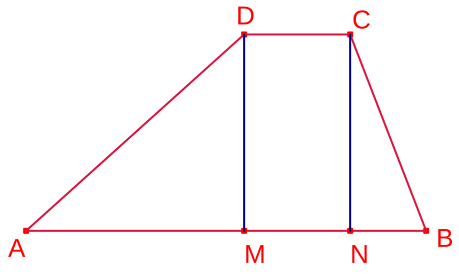
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{PE}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$. $\frac{\overline{PE}}{7\sqrt{5}} = \frac{14\sqrt{5}}{28}$.

$\overline{PE} = \overline{PA} = \frac{35}{2}$.

413.- En un trapezi de costats paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, tenim que $\overline{AD}=39$, $\overline{CD}=14$, $B=69^{o}$, $D=138^{o}$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$.

Solució 1:
Siguen M, N les projeccions de D i C sobre $\overline{AB}$, respectivament.
$\overline{MN}=\overline{CD}=14$.
Per ser angles sobre paral·leles:
$A=180^{o}-D=42^{o}$.

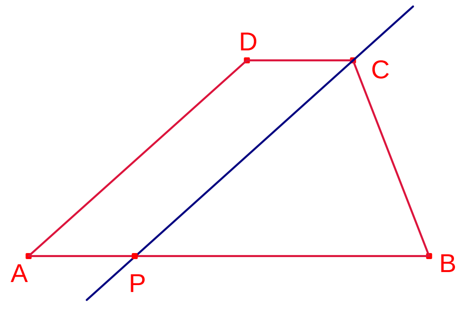


Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:
$\overline{AM}=39\cos 42^{o}$, $\overline{DM}=39\sin 42^{o}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNC}$:
$\overline{BN}=\dfrac{\overline{DM}}{tg69^{o}}=\dfrac{39\sin 42^{o}}{tg69^{o}}$.

$$\overline{AB}=\overline{AM}+\overline{BN}+\overline{MN}=39\left(\cos 42^{o}+\frac{\sin 42^{o}}{tg69^{o}}\right)+14=.$$
$$=39\left(\cos 42^{o}+\frac{\sin 42^{o}\cdot\cos 69^{o}}{\sin 69^{o}}\right)+14=$$
$$=39\left(\frac{\sin 69^{o}\cdot\cos 42^{o}+\sin 42^{o}\cdot\cos 69^{o}}{\sin 69^{o}}\right)+14=$$
$$=39\left(\frac{\sin 111^{o}}{\sin 69^{o}}\right)+14=$$
$$=39\left(\frac{\sin 69^{o}}{\sin 69^{o}}\right)+14=39+14=53.$$

Solució 2:
Tracem la paral·lela al costat $\overline{AD}$ que passa per C que talla el costat $\overline{AB}$ en el punt P.
Per ser angles sobre paral·leles:
$A=180^{o}-D=42^{o}$.
APCD és un paral·lelogram aleshores:
$\overline{AP}=\overline{CD}=14$, $\overline{PC}=\overline{AD}=39$.

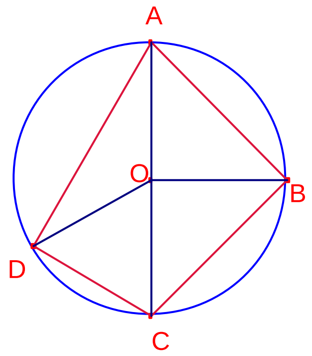


$\angle CPB=A=42^{o}$.
$\angle BCP=180^{o}-(\angle CPB+B)=180^{o}-(42^{o}+69^{o})=69^{o}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BCP}$ és isòsceles.
$\overline{PB}=\overline{PC}=39$.
$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{BP}=14+39=53$.

414.- Sobre una circumferència de centre O es dibuixa en quadrilàter ABCD tal que $\angle AOB = 90^o$, $\overline{AC}$ és un diàmetre i $\angle COD = 60^o$.
Si l'àrea del sector circular d'angle $\angle AOB = 90^o$ té àrea $41{,}04\,cm^2$. Calculeu l'àrea del quadrilàter ABCD.

Solució:



Siga $r = \overline{OA}$ radi de la circumferència.

El triangle $\overset{\Delta}{OCD}$ és equilàter.

Els triangles $\overset{\Delta}{OCD}$, $\overset{\Delta}{OAD}$ tenen la mateixa àrea ja que tenen la mateixa base $\overline{OC} = \overline{OA}$ i la mateixa altura sobre aquestes bases.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és igual a dues vegades l'àrea del triangle equilàter de costat r.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a l'àrea del quadrat de costat r.
L'àrea del quadrilàter ABCD és:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = r^2 + 2 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r^2 .$$

L'àrea del quadrant de circumferència és 41,04, aleshores:

$$41{,}04 = \frac{1}{4}\pi r^2 .$$

$$r^2 = \frac{4 \cdot 41{,}04}{\pi} .$$

Aleshores, $S_{ABCD} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{4 \cdot 41{,}04}{\pi} \approx 97{,}51\,cm^2$.

415.- Dividiu un quadrat de $196\,cm^2$ d'àrea en quatre triangles i tres quadrilàters d'igual àrea traçant exactament 7 segments que tinguen vèrtex en el centre del quadrat.

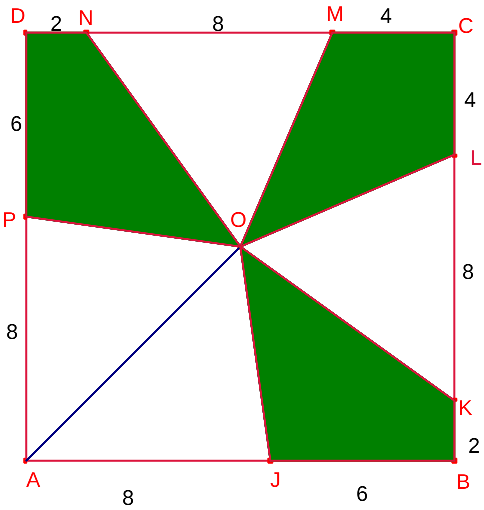
Solució:
Siga ABCD el quadrat de centre O.
El costat del quadrat és:

$\overline{AB} = \sqrt{196} = 14$.

Com que els quatre triangles i tres quadrilàters han de tenir igual àrea aquesta ha de ser:

$\frac{196}{7} = 28$.

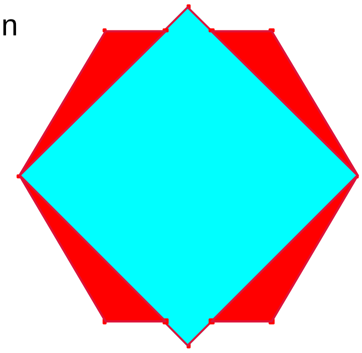
Com un dels vèrtex dels triangles és el centre del quadrat podem considerar la base sobre els costats del quadrat. Aleshores la base ha de mesurar 8cm.



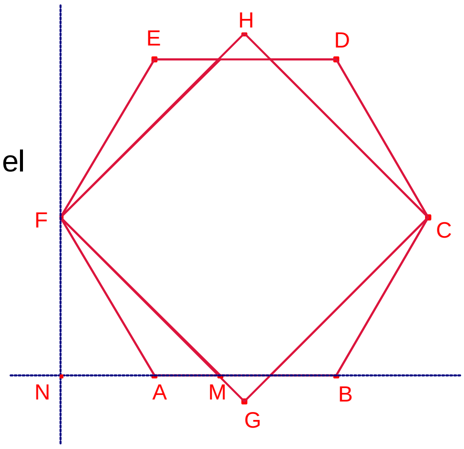
Cada quadrilàter es pot dividir en 2 triangles que tenen la base sobre e costats del quadrat i la seua suma de mesures ha de ser 8cm.
Una possible solució és:

$\overline{AJ} = 8$, $\overline{JB} = 6$, $\overline{BK} = 2$, $\overline{BL} = 8$, $\overline{LC} = \overline{CM} = 4$, $\overline{MN} = 8$,
$\overline{DN} = 2$, $\overline{DP} = 6$, $\overline{AP} = 8$.

416.- Tenim un paper roig de forma hexagonal de costat 2 i un paper quadrat blau de diagonal 4.
Col·loquem el quadrat damunt de l'hexàgon de manera que dos vèrtexs oposats del quadrat coincidesquen en dos vèrtexs oposats de l'hexàgon.
Determineu l'àrea de la regió de l'hexàgon que no queda coberta pel quadrat, és a dir, la regió roja visible.



Solució:
Siga l'hexàgon ABCDEF de costat 2
Siga el quadrat FGCH de diagonal 4.
El costat $\overline{FG}$ del quadrat talla el costat $\overline{AB}$ de l'hexàgon en el punt M.



$$\angle GFA = \frac{\angle EFA - \angle HFG}{2} = \frac{120^{o}-90^{o}}{2} = 15^{o}.$$

$$\angle AMF = 180^{o}-(\angle FAM + \angle GFA) = 180^{o}-(120^{o}+15^{o}) = 45^{o}.$$

Siga N la projecció de F sobre la recta AB.

$\angle NAF = 60^{o}$. $\overline{AF} = 2$.
$\overline{FN} = \sqrt{3}$.

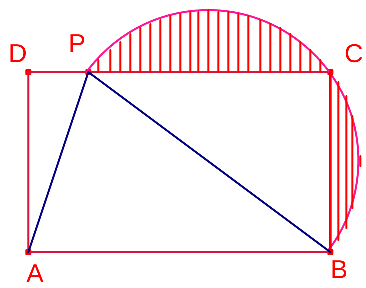
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMF}$ és igual a l'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{MNF}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ANF}$:

$$S_{AMF} = S_{MNF} - S_{ANF} = \frac{\overline{FN}^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\overline{AF}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

L'àrea que cerquem és quatre vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMF}$:

$$S_{roja} = 4 \cdot S_{AMF} = 6 - 2\sqrt{3}.$$

417.- ABCD és un rectangle. P és un punt del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{PB} = \overline{AB}$.
L'arc PCB és una semicircumferència.
Si $S_{BCP} = 4 \cdot S_{APD}$ i $S_{ABP} = 4{,}8\,dm^2$, calculeu el perímetre de la zona ratllada.



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{BCP}$, $\overset{\Delta}{APD}$ tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:

$$4 = \frac{S_{BCP}}{S_{APD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}$$

Siga $x = \overline{PD}$, $\overline{PC} = 4x$, $\overline{AB} = \overline{PB} = 5x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCP}$:

$(5x)^2 = (4x)^2 + \overline{BC}^2$.

$\overline{BC} = 3x$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és 4,8:

$\frac{5x \cdot 3x}{2} = 4{,}8$. Resolent l'equació:

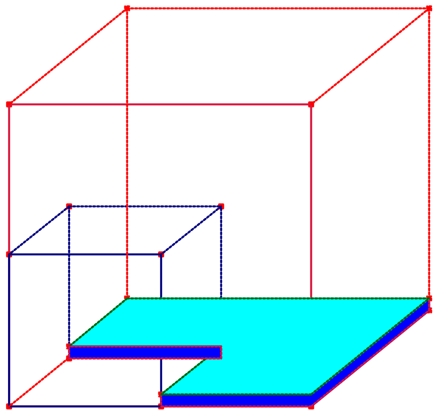
$x = \frac{4}{5}$.

El perímetre de la zona ratllada és igual a la suma de les mesures dels segments $\overline{PC}$, $\overline{BC}$ i mig semicercle de diàmetre $\overline{PB}$:

$$p = \overline{PC} + \overline{BC} + \frac{1}{2}\pi \cdot \overline{PB} = 4x + 3x + \frac{1}{2}\pi 5x = \frac{28}{5} + 2\pi \approx 11{,}88\,dm.$$

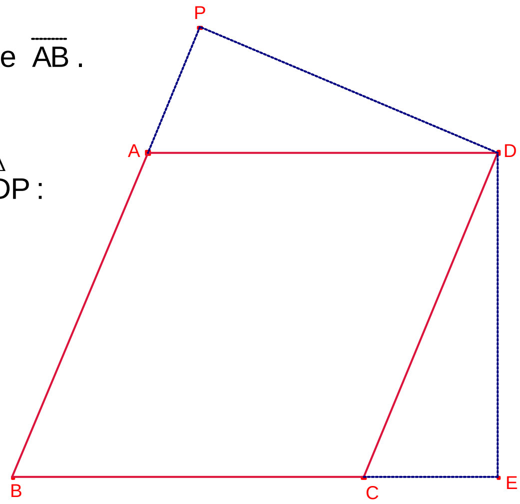
418.- En un recipient cúbic d'un metre d'aresta hi ha 3cm d'aigua.
S'introdueix un dau cúbic de plom en el recipient, i quan queda recolzat al fons, l'altura d'aigua del recipient és de 4cm.
Quina és l'aresta del cub de plom.

Solució:
Siga a l'aresta del cub de plom.
La quantitat d'aigua en el recipient és de
$3 \cdot 100^2 = 30000 \, cm^3$.



Quan posem el cub de plom el seu volum és el mateix i es igual al prisma de base un quadrat de costat 100 cm menys un quadrat de costat a i altura 4.
El seu volum és:
$(100^2 - a^2)4 = 30000$.
Resolent l'equació:
$a = 50 \, cm$.

419.- Siga el paral·lelogram ABCD, B angle agut, tal que $\overline{BC} = 13$, l'altura sobre el costat $\overline{AB}$ mesura 12.
Siga E de la prolongació del costat $\overline{BC}$ tal que $\angle BED = 90^{o}$, $CE = 5$.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ABED.



Solució.
Notem que E és la projecció de D sobre la prolongació de $\overline{AB}$.
Siga P la projecció de D sobre la recta AB.
$\overline{DP} = 12$, $\overline{AD} = \overline{BC} = 13$.

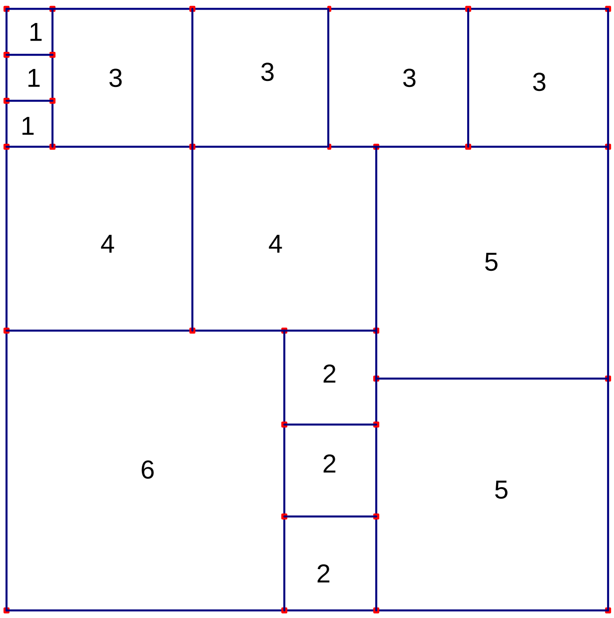
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADP}$:
$\overline{AP} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

Notem que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADP}$, $\overset{\Delta}{CDE}$ són semblants.

Com que $\overline{AP} = \overline{CE} = 5$, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADP}$, $\overset{\Delta}{CDE}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{CD} = 13$, $\overline{DE} = 12$.
L'àrea del quadrilàter ABED és:

$$S_{ABED} = S_{ABCD} + S_{CED} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} + \frac{\overline{CE} \cdot \overline{DE}}{2} = 186.$$

420.-



En el trencaclosques de 15 peces quadrades s'ha format un quadrat de 13×13 com el de la figura.
Cada número indica la longitud del costat de la peça.

Joan va perdre una peça i amb el trencaclosques format per les 14 peces restants va poder formar un quadrat.
Determineu quina peça va perdre i digueu un es construeix el quadrat amb les 14 peces restants.

Solució:

L'àrea del quadrat inicial és 13^2.

Cerquem $a \in 1,2,3,4,5,6$ tal que $13^2 - a^2$ siga un quadrat perfecte

L'únic que ho complex és $a = 5$ ja que $13^2 - 5^2 = 12^2$.
Aleshores la peça perduda té costat 5 i el quadrat final té costat 12. Una solució del trencaclosques és: