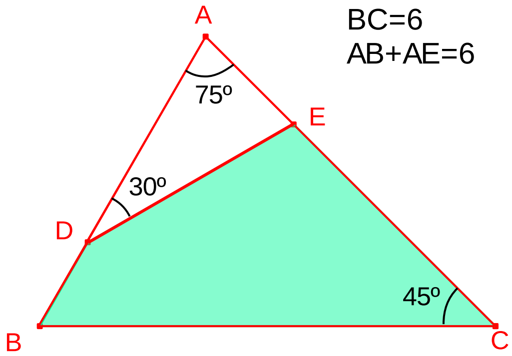
4191.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{BC} = 6, A = 75°, C = 45°$
Siguen D, E dels costats $\overline{AB}, \overline{AC}$ tal que $\angle ADE = 30°$
Si $\overline{AB} + \overline{AE} = 6$, calculeu l'àrea del quadrilàter $BCED$



Solució:
$\angle ABC = 60°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$\overline{AB} = 6(\sqrt{3} - 1)$

$\overline{AE} = 6 - \overline{AB} = 6(2 - \sqrt{3})$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$$\frac{6(2-\sqrt{3})}{\frac{1}{2}} = \frac{\overline{DE}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$\overline{DE} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\left(3(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 9(2-\sqrt{3})$$

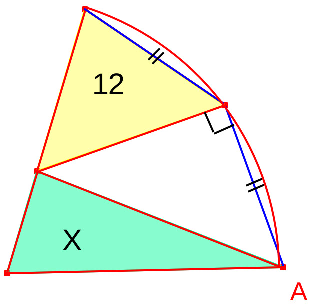
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6(\sqrt{3}-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9(3-\sqrt{3})$$

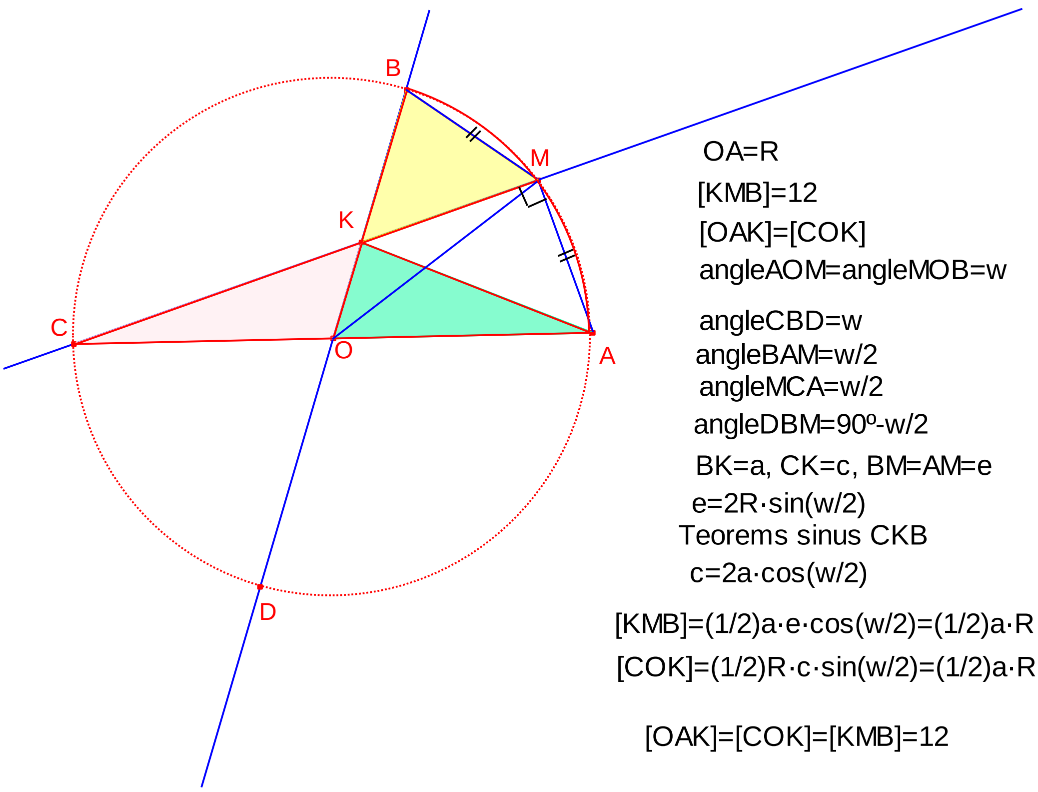
L'àrea del quadrilàter $BCED$ és:

$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE} = 9$

4192.- La figura està formada per un sector circular, dues cordes iguals i tres triangles.
Calculeu l'àrea X del triangle inferior sabent que el triangle superior té àrea 12 i el central és rectangle.



Solució:



OA=R

[KMB]=12

[OAK]=[COK]

angleAOM=angleMOB=w

angleCBD=w

angleBAM=w/2

angleMCA=w/2

angleDBM=90º-w/2

BK=a, CK=c, BM=AM=e

e=2R·sin(w/2)

Teorems sinus CKB

c=2a·cos(w/2)

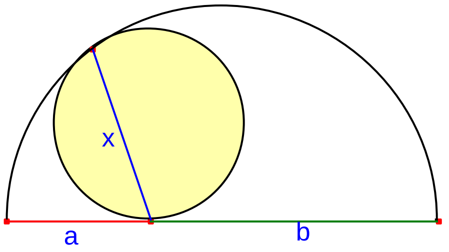
[KMB]=(1/2)a·e·cos(w/2)=(1/2)a·R·sin w

[COK]=(1/2)R·c·sin(w/2)=(1/2)a·R·sun w

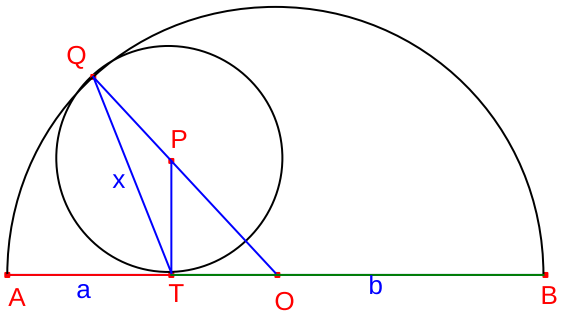
[OAK]=[COK]=[KMB]=12

4193.- La figura està formada per un semicercle i una circumferència tangent.
El punt de tangència de la circumferència divideix el diàmetre en dos segments de longituds a, b
Proveu que el segment x que uneix els dos punts de tangència compleix:

$$x = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = a + b$
Siga $\overline{AT} = a, \overline{BT} = b$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = \overline{PT} = r$
Siga $\overline{TQ} = x$



$$\overline{OT} = \frac{b-a}{2}, \overline{OP} = \frac{a+b}{2} - r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTO}$:

$$\left(\frac{a+b}{2} - r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Simplificant:

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

Siga $\alpha = \angle TOP$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{b-a}{2}}{\frac{a+b}{2} - \frac{ab}{a+b}} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{TOQ}$:

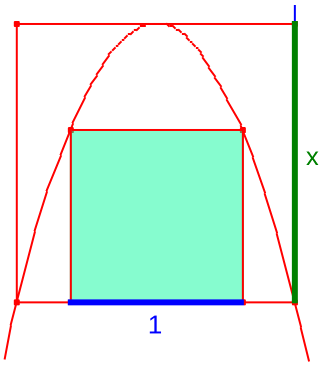
$$x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

$$x^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$$

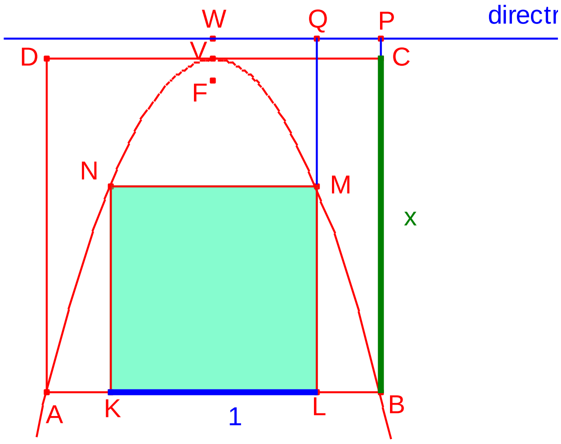
Aleshores:

$$x = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4194.- La figura està formada per dos quadrats de costats $1, x$ i una paràbola tangent a un costat del quadrat gran i passa per 4 vèrtex.
Calculeu la mesura del costat x



Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = 1$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = x$



Siga F el focus i considerem la directriu.
Siga V el vèrtex de la paràbola.
Siga $\overline{FV} = \overline{WV} = a$
Siga P la projecció de B sobre la directriu.
$\overline{BP} = \overline{FB}$

$$x + a = \sqrt{(x+a)^2 + \frac{x^2}{4}}$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$$a = \frac{1}{16}$$

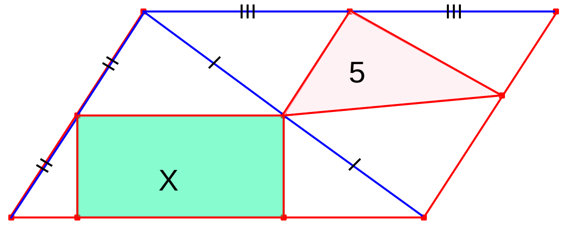
Siga Q la projecció de M sobre la directriu.
$\overline{MQ} = \overline{FM}$

$$\frac{17}{16}x - 1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{15}{16}x - 1\right)^2}$$

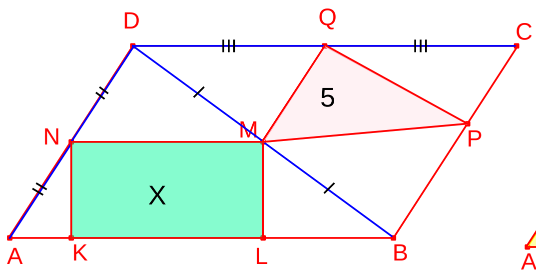
Resolent l'equació:

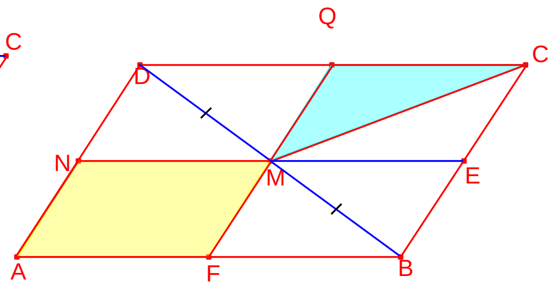
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

4195.- La figura està formada mer un paral·lelogram i en el seu interior un triangle d'àrea 5 y un rectangle.
Calculeu l'àrea X del rectangle.



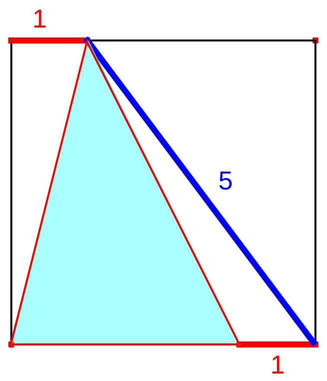
Solució:



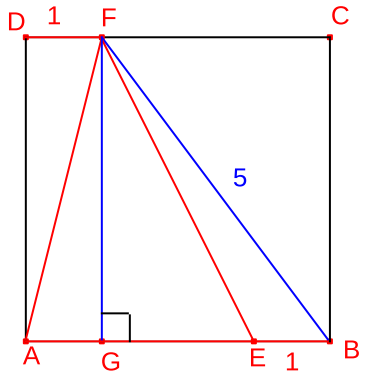


MQ, BC, paral·lels
[MQC]=[MQP]=5
F punt mig AB
MN=AF
[KLMN]=[AFMN]=2·[MQC]=10

4196.- La figura està formada per un quadrat i un triangle.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga el triangle $\overset{\Delta}{AEF}, \overline{AE} = a$
Siguen E, F dels costat $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament tal que
$\overline{BE} = 1, \overline{DF} = 1$
$\overline{AB} = 1 + a$
Siga G la projecció de F sobre el costat $\overline{AB}$
$\overline{AG} = 1, \overline{BG} = a, \overline{FG} = 1 + a$

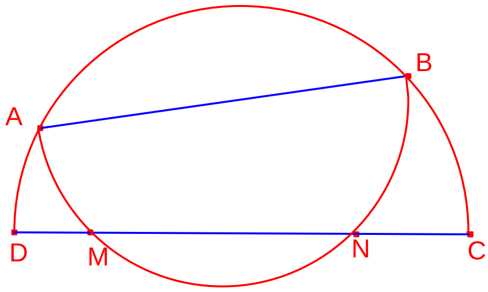


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FGB}$:
$25 = a^2 + (1 + a)^2$
Simplificant:
$a^2 + a - 12 = 0$
Resolent l'equació:
$a = 3$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és:
$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$

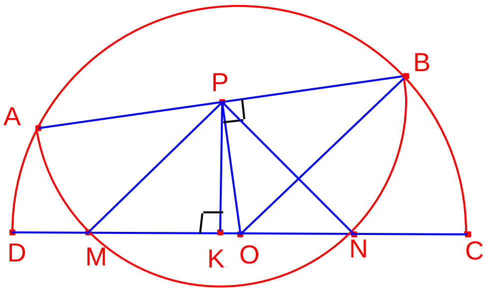
4197.- La figura està formada per dues semicircumferències.

$\overline{DM} = 2, \overline{MN} = 7, \overline{NC} = 3$

Calculeu la mesura del diàmetre $\overline{AB}$



Solució:



OC=OD=6

PA=PM=PN=r

AB=2r

K punt mig MN

MK=7/2, OK=1/2

Teorema Pitàgores OPB

OP=sqrt(36-r²)

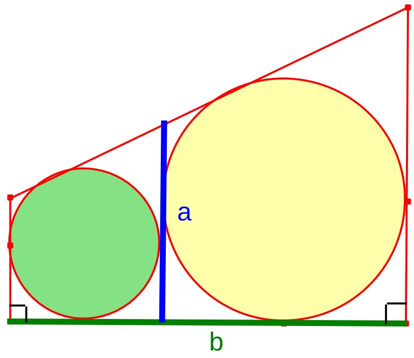
Teorema Pitàgores MKP, OKP

r²-49/4=36-r²-1/4

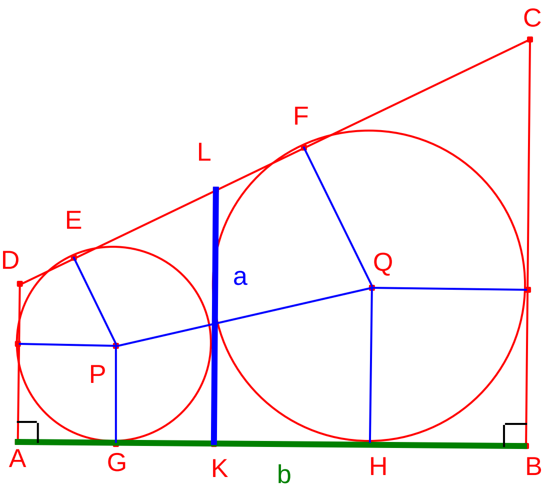
r=2·sqrt(6)

AB=4·sqrt(6)

4198.- Dues circumferències estan inscrites en un trapezi dividit per un segment perpendicular.
Calculeu la proporció entre la longitud a i el costat b



Solució:



PE=s, QF=r

b=AB=2r+2s

EF=GH=r+s

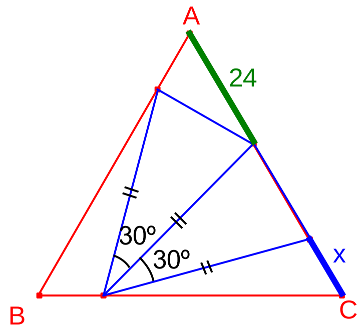
a=LF+r

a=EL+s

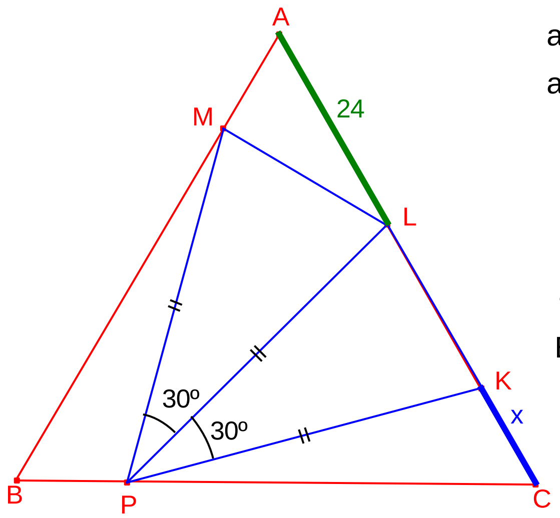
2a=EF+r+s=2(
r+s)=b

a : b = 1 :2

4199.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.
S'han dibuixat dos triangles isòsceles iguals
Determineu la mesura del segment x



Solució:



angleMLP=anglePLK=75º

angleMLA=180º-150º=30º

angleAML=90º

AM=24/2=12

angleBMP=180º-(90º+75º)=15

angleKPC=15º+60º-(30º+30º)=15º

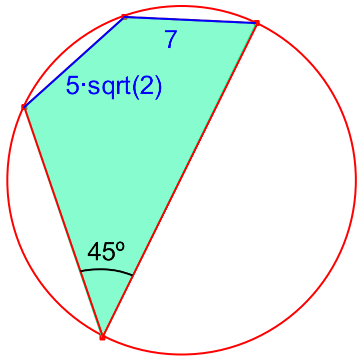
Els triangle MBP, PCK iguals

BM=PC

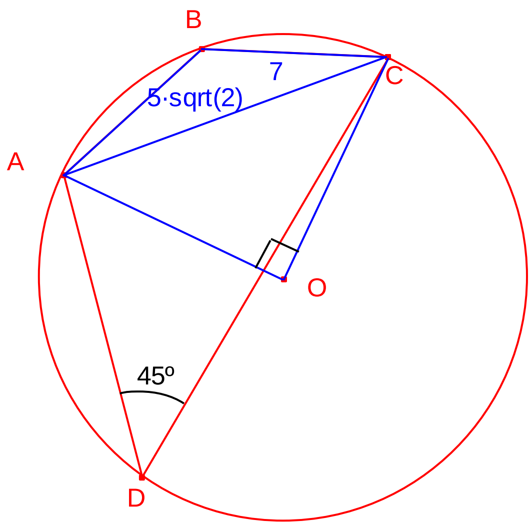
AM=BP

CK=BP=AM=12

4200.- El quadrilàter ombrejat està inscrit en la circumferència.
Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:



AngleABC=180º-45º=135º

AngleAOC=2·45º=90º

Teorema cosinus ABC

AC^2=50+49+2·5·srt(2)·7·sqrt(2)/2

AC=13

OA=AC·sqrt(2)/2

OA=13·sqrt(2)/2