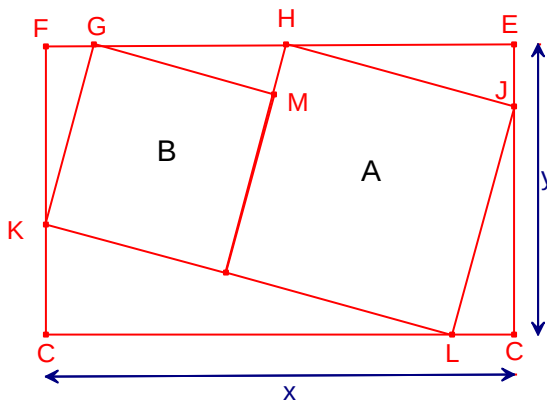
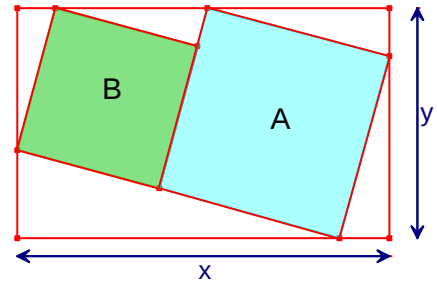


Problemes de Geometria per a l'ESO 421

4201.- La figura està formada per dos quadrats d'àrees A, B inscrits en un rectangle de costats x, y .
Si $\frac{A}{B} = \frac{x}{y}$ calculeu el valor de la proporció.

Solució:



$$LJ=a, GM=b$$

$$x/y=a^2/b^2=k$$

$$MH=a-b$$

$$GH=\sqrt{a^2+2b^2-2ab}$$

$$FG=b(a-b)/\sqrt{a^2+2b^2-2ab}$$

$$HE=CJ=ab/\sqrt{a^2+2b^2-2ab}$$

$$EJ=a(a-b)/\sqrt{a^2+2b^2-2ab}$$

$$x=(a^2+b^2)/\sqrt{a^2+2b^2-2ab}$$

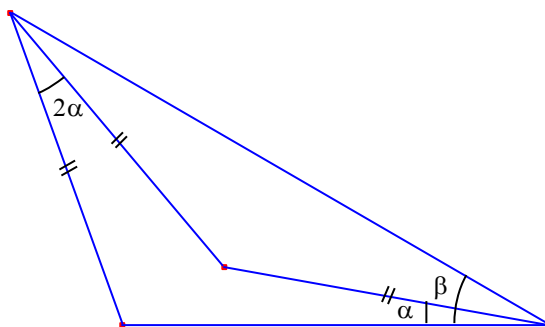
$$y=a^2/\sqrt{a^2+2b^2-2ab}$$

$$k=x/y=(a^2+b^2)/a^2=(k+1)/k$$

$$k^2-k+1=0$$

$$k=\Phi$$

4202.- En la figura determineu la
mesura de l'angle β



Solució:

Siga el triangle $\triangle ABC$, $B = \beta$, $\overline{BC} = a$
 Siga K el punt interior tal que $\overline{AC} = \overline{CK} = \overline{BK} = b$
 $\angle KBC = \angle KCB = \beta - \alpha$
 $A = 180^\circ - \alpha - 2\beta$, $\angle BKC = 180^\circ + 2\alpha - 2\beta$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{a}{\sin(\alpha + 2\beta)} = \frac{b}{\sin \beta}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle KBC$:

$$\frac{a}{\sin(2\beta - 2\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta - \alpha)}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\sin(\beta - \alpha) \cdot \sin(\alpha + 2\beta) = \sin \beta \cdot \sin(2\beta - 2\alpha)$$

$$\sin(\alpha + 2\beta) = 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos(\beta - \alpha)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos 2\beta + \cos \alpha \cdot \sin 2\beta = 2 \sin \beta (\cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos 2\beta + 2 \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta = 2 \sin \beta (\cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos 2\beta = 2 \sin \beta \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha$$

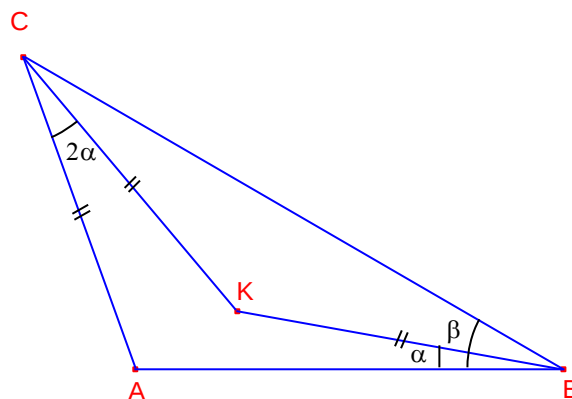
$$\cos 2\beta = 2 \cdot \sin^2 \beta$$

$$\cos^2 \beta - \sin^2 \beta = 2 \cdot \sin^2 \beta$$

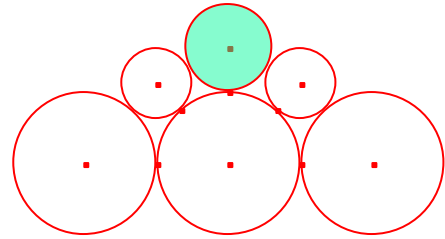
$$\cos^2 \beta = 3 \cdot \sin^2 \beta$$

$$\tan^2 \beta = \frac{1}{3}$$

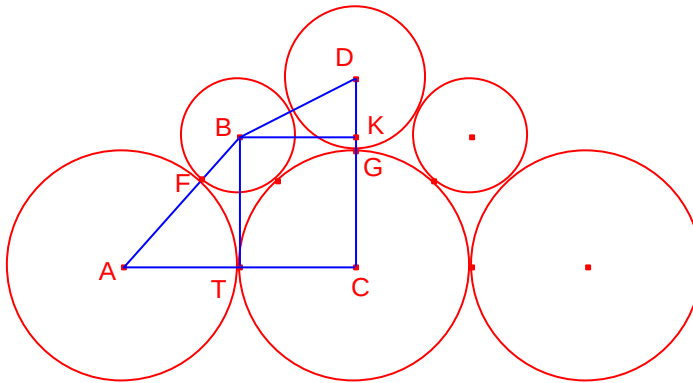
$$\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \beta = 30^\circ$$



4203.- Les tres circumferències de la fila inferior tenen radi 2 i les dues circumferències de la fila del mig tenen radi 1. Calculeu el radi de la circumferència superior sabent que totes són tangents com indica el dibuix.



Solució:



Siguen les circumferències de centres A, C i radi $\overline{AT} = \overline{CT} = 2$

Siga la circumferència de centre B i radi $\overline{BF} = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ATB$:

$$\overline{BT} = \sqrt{5}$$

Siga la circumferència de centre D i radi $\overline{DG} = r$

Siga K la projecció de B sobre $\overline{CD}$

$$\overline{BK} = 2, \overline{BD} = 1 + r, \overline{DK} = 2 + r - \sqrt{5}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BDK$:

$$(1 + r)^2 = 4 + (2 + r - \sqrt{5})^2$$

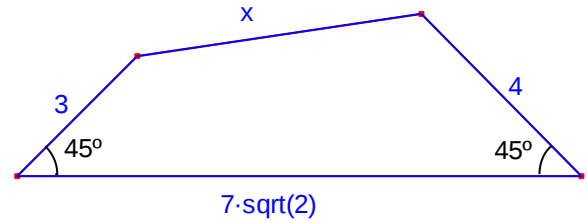
simplificant:

$$(2\sqrt{5} - 2)r = 12 - 4\sqrt{5}$$

Resolent l'equació:

$$r = \sqrt{5} - 1$$

4204.- En el quadrilàter de la figura, calculeu la mesura del costat x



Solució:

Siga el quadrilàter $ABCD$, $\overline{AB} = 7\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = x$, $\overline{AD} = 3$, $A = B = 45^\circ$

Siguen K, L les projeccions de D i C sobre el costat $\overline{AB}$.

$$\overline{AK} = \overline{DK} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \overline{BL} = \overline{CL} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{KL} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

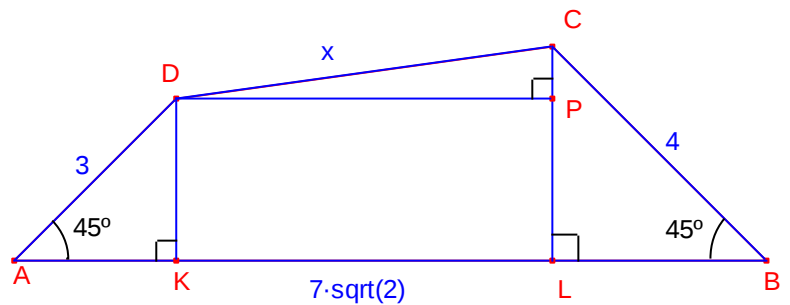
Siga P la projecció de D sobre $\overline{CL}$

$$\overline{CP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

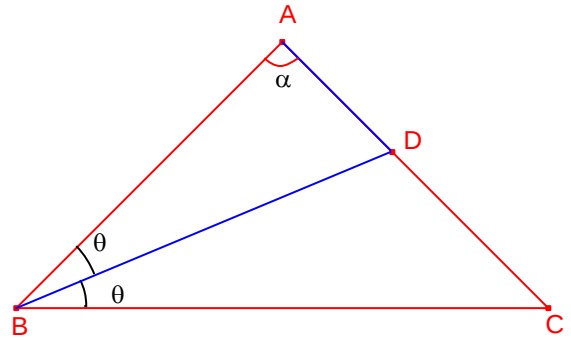
aplicant el teorema de Pitàgores al

triangle rectangle $\triangle DPC$:

$$x = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 5$$



4205.- Siga el triangle $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$
 Siga $\theta = \angle ABD = \angle DBC$, $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{BC}$
 Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = b, \overline{BC} = a$$

$$\text{Siguen } \overline{AD} = x, \overline{BD} = y$$

$$\alpha = 180^\circ - 4\theta$$

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{x}{b} = \frac{b-x}{a}$$

$$x = \frac{ab}{a+b}, \overline{CD} = \frac{ab}{a+b}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$

$$\frac{b}{\sin 2\theta} = \frac{a}{\cos 4\theta} = \frac{a}{2 \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta}$$

$$\frac{a}{b} = 2 \cdot \cos 2\theta$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle CBD$

$$\frac{\frac{ab}{a+b}}{\sin \theta} = \frac{a}{\sin 5\theta}$$

$$\frac{a+b}{1} = \frac{\sin 5\theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{\sin 5\theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{1}{2 \cdot \cos 2\theta + 1} = \frac{\sin \theta}{\sin 5\theta}$$

$$\sin 5\theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos 2\theta + \sin \theta$$

$$\sin 5\theta - \sin \theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos 2\theta$$

$$\sin 5\theta - \sin \theta = -\sin \theta + \sin 3\theta$$

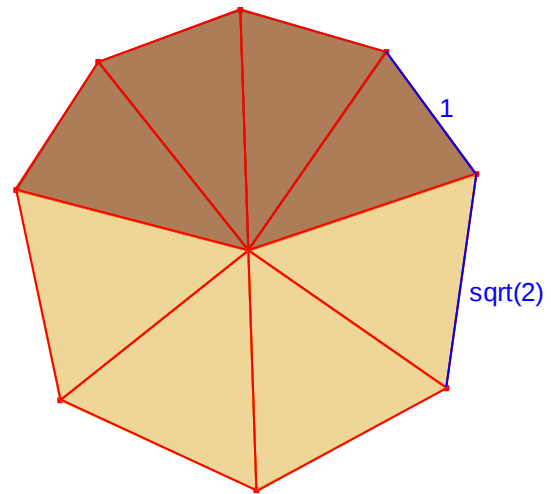
$$\sin 5\theta = \sin 3\theta$$

$$5\theta = 180^\circ - 3\theta$$

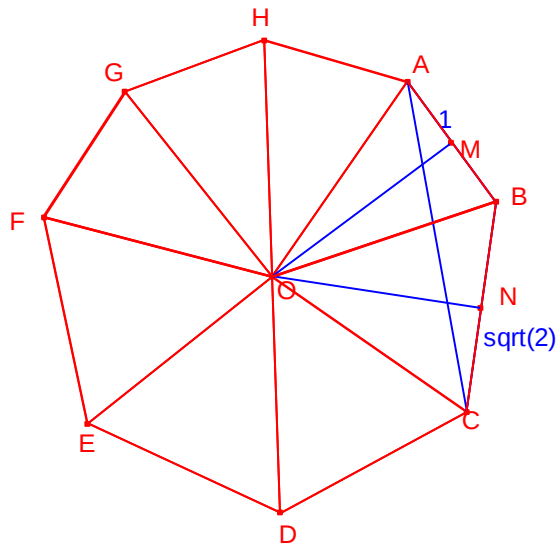
$$4\theta = 90^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 4\theta = 90^\circ$$

4206.- La figura està formada per quatre triangles isòsceles iguals de base 1 i quatre triangles isòsceles iguals de base $\sqrt{2}$ que comparteixen el vèrtex superiors. Calculeu la proporció entre l'àrea marró i l'àrea d'or.



Solució:



$$\text{angleAOB}=x, \text{angleBOC}=y$$

$$4x+4y=360^\circ$$

$$x+y=90^\circ$$

$$OA=OB=OC=c$$

$$AC=d$$

$$\text{AngleABC}=135^\circ$$

$$d^2=1+2+2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} / 2 = 5$$

$$c=\sqrt{5/2}$$

$$OM=3/2$$

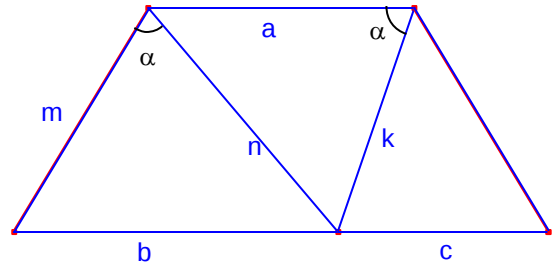
$$ON=\sqrt{2}$$

$$[\text{OFGHAB}]=4 \cdot (1/2) \cdot 1 \cdot 3/2 = 3$$

$$[\text{OBCDEF}]=4 \cdot (1/2) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$$

$$[\text{OFGHAB}]/[\text{OBCDEF}]=3/4$$

4207.- La figura està formada per un trapezi isòsceles i dos segments m, k .
 Proveu que $mnk = abc$



Solució:

Siga el trapezi isòsceles $ABCD$, $A = B = \beta$

Siga $\gamma = \angle AED = \angle EDC$

Aleshores els triangles $\triangle AED, \triangle EDC, \triangle BCE$.

Aplicant el teorema de Tales als triangles $\triangle AED, \triangle EDC$.

$$\frac{b}{n} = \frac{m}{k} = \frac{n}{a}$$

$$\frac{b}{n} = \frac{m}{k} = \frac{n}{a}$$

$$k = \frac{am}{n}, n^2 = ab$$

Aplicant el teorema de Tales als triangles

$\triangle AED, \triangle BCE$.

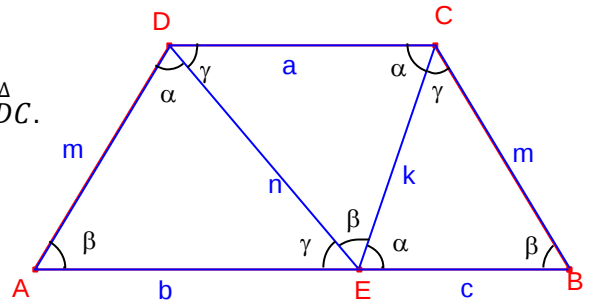
$$\frac{b}{m} = \frac{m}{c} = \frac{n}{k}$$

$$\frac{b}{m} = \frac{m}{c} = \frac{n}{k}$$

$$k = \frac{cn}{m}, m^2 = bc$$

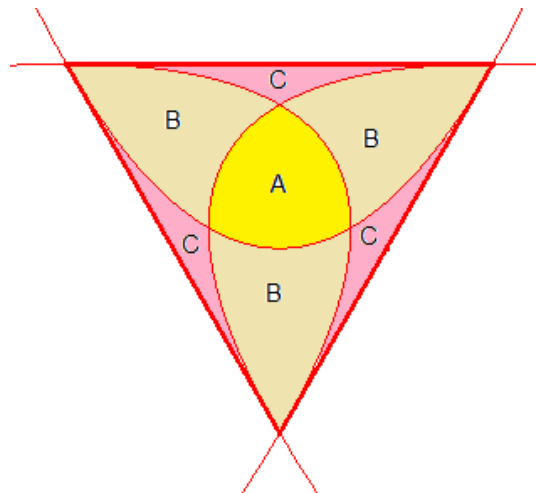
$$m^2 \cdot n^2 \cdot k^2 = bc \cdot ab \cdot \frac{am}{n} \cdot \frac{cn}{m} = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$$

$$mnk = abc$$



4208.- La figura està formada per un triangle equilàter i tres paràboles, cadascuna tangent a dos costats dels triangles.

La calculeu la proporció de les àrees A , B i C i l'àrea del triangle equilàter.



Solució:

Siga el triangle equilàter RST de costat $\overline{RS} = 2$

Siguin M, N els punts migs dels costats $\overline{RS}, \overline{ST}$, respectivament.

Considerem el focus F i la directriu de la paràbola que passa per R, S .

Siga V el vèrtex de la paràbola.

Siguin $\overline{MF} = b, \overline{FV} = \overline{VK} = a$

$\overline{FS} = \overline{SS'}$ i TS mediatriu del segment $\overline{FS'}$

$$\sqrt{1 + b^2} = 2a + b, \quad \frac{2a}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Resolent el sistema:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}, a = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \overline{FK} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

F és el centre del triangle RST , focus de les tres paràboles.

Siga P la intersecció de la recta mediatriu del costat $\overline{ST}$ i la paràbola.

Siguin P', P'' les projecció de P sobre la directriu i l'eix de la paràbola, respectivament.

Siga $\overline{FP} = x$

$$\overline{P''F} = \frac{1}{2}x, \overline{P''P} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\overline{FP} = \overline{PP'}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{x}{2}$$

$$\overline{PP''} = \frac{1}{3}, \overline{PQ} = \frac{2}{3}, \overline{PN} = \overline{EM} = \frac{\sqrt{3}}{9}, \overline{P''V} = \frac{\sqrt{3}}{18}, \overline{TE} = \frac{8}{9}\sqrt{3}$$

Aplicant la propietat d'Arquimedes l'àrea del segment parabòlic $\widehat{PVQ}$ és:

$$S_{segment} = \frac{4}{3}S_{PVQ} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{2\sqrt{3}}{81}$$

L'àrea A és:

$$A = 3 \cdot S_{segment} + S_{PQE} = 3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{81} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5\sqrt{3}}{27}$$

PP' és tangent a la paràbola que passa pels punts R, T .

Aplicant la propietat d'Arquimedes l'àrea del segment parabòlic $\widehat{TPE}$ és:

$$A + B = 2 \cdot \frac{4}{3}S_{TPE} = 2 \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{32\sqrt{3}}{81}, \quad B = \frac{32\sqrt{3}}{81} - \frac{5\sqrt{3}}{27} = \frac{17\sqrt{3}}{81}$$

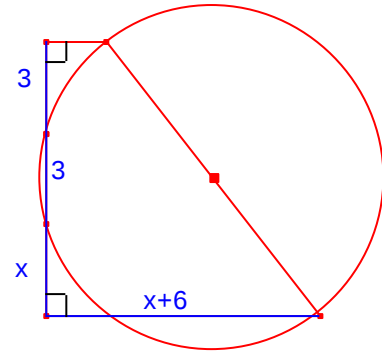
L'àrea del triangle RST és: $S_{RST} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3}$

$$3C = S_{RST} - A - 3B = \frac{5\sqrt{3}}{27}, \quad C = \frac{5\sqrt{3}}{81}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{A}{S_{RST}} = \frac{5}{27}, \frac{B}{S_{RST}} = \frac{17}{81}, \frac{C}{S_{RST}} = \frac{5}{81}$$

4209.- La figura està formada per un trapezi rectangle i una circumferència que té el diàmetre el costat oblic.
Determineu el valor de x i l'àrea del trapezi.



Solució:

Siga el trapezi rectangle $ABCD$, $\overline{AB} = x + 6$, $\overline{AD} = 6 + x$

Siga O el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{BC} = 2r$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{EF}$

$\overline{OM}$ és perpendicular a $\overline{EF}$. Aleshores, $\overline{OM}$ és paral·lela mitjana del trapezi.

$$\overline{AD} = 2 \cdot \overline{DM}$$

$$6 + x = 2 \left(3 + \frac{3}{2} \right)$$

Resolent l'equació:

$$x = 3$$

Siga $a = \overline{CD}$

$$\overline{OM} = \frac{9 + a}{2}, \overline{OE} = r$$

Siga P la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.

$$\overline{CP} = 9, \overline{BP} = 9 - a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\triangle EMO$, $\triangle CPB$:

$$r^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}(a^2 + 18a + 81)$$

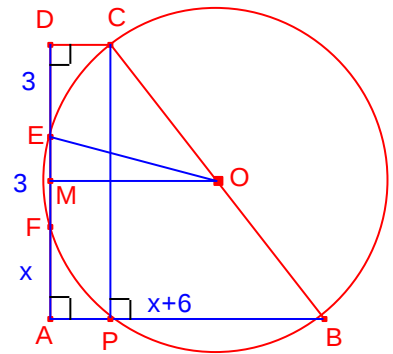
$$4r^2 = 81 + a^2 - 18a + 81$$

Resolent el sistema:

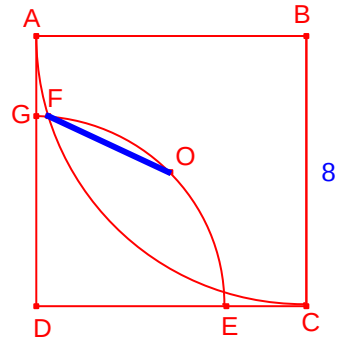
$$a = 2, r = \sqrt{130}$$

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{9 + 2}{2} \cdot 9 = \frac{99}{2}$$



4210.- La figura està formada per un quadrat $ABCD$ de centre O i de costat 8 i dos quadrants. Calculeu la mesura del segment $\overline{OF}$



Solució:

$$\overline{BD} = 8\sqrt{2}$$

$$\overline{DO} = \overline{OB} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{BF} = 8$$

$\overline{OF}$ és la mitjana del triangle $\triangle DBF$

$$\overline{OF} = \frac{\sqrt{2 \cdot (4\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 8^2 - (8\sqrt{2})^2}}{2} = 4$$

