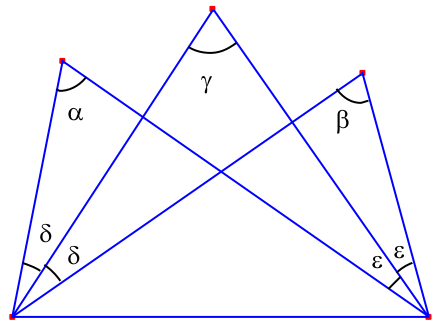
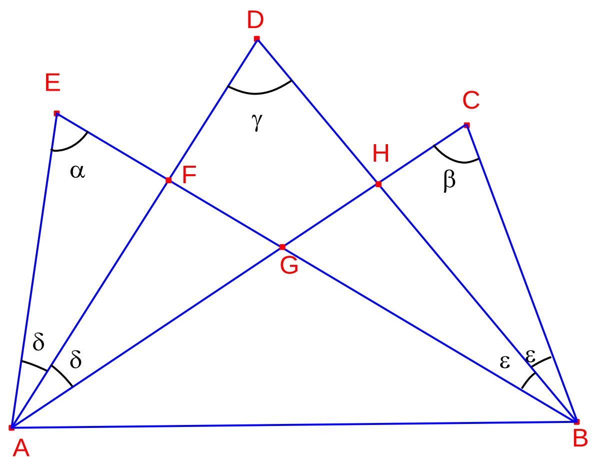
Problemes de Geometria per a l'ESO 422

4211.- Tres triangles tenen la mateixa base.
Determineu l'angle superior del mig γ en funció dels altres α, β



Solució:



angleAFG= $\alpha+\delta$

angleAGB= $\alpha+2\delta$

angleGHB= $\beta+\varepsilon$

angleAGB= $\beta+2\varepsilon$

$\varepsilon=(\alpha-\beta+2\delta)/2$

angleDFG=180º-$(\alpha+\delta)$

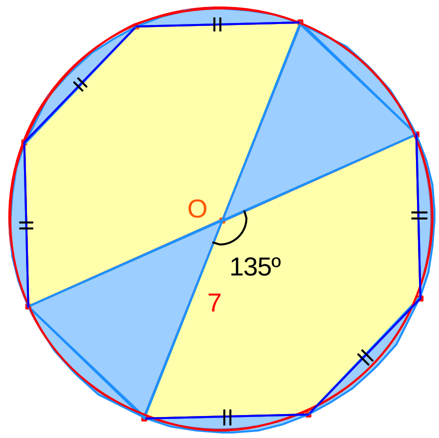
angleGHD=180º- $(\beta+\varepsilon)$

D+F+G+H=360º

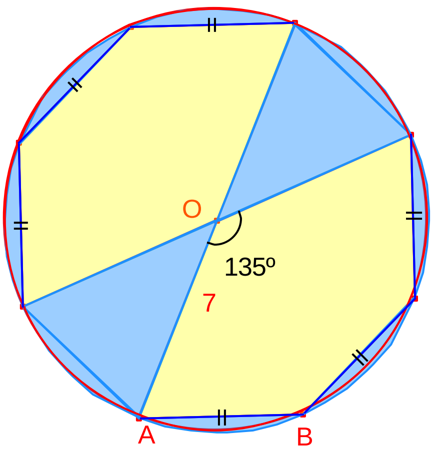
$\gamma+180-(\alpha+\delta)+\alpha+2\delta+180-(\beta+\varepsilon)=360$

$\gamma=(\alpha+\beta)/2$

4212.- En una circumferència de centre O i radi 7 s'han dibuixat dos polígons iguals.
Calculeu l'àrea blava.



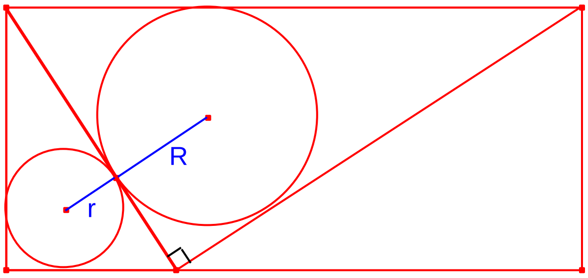
Solució:



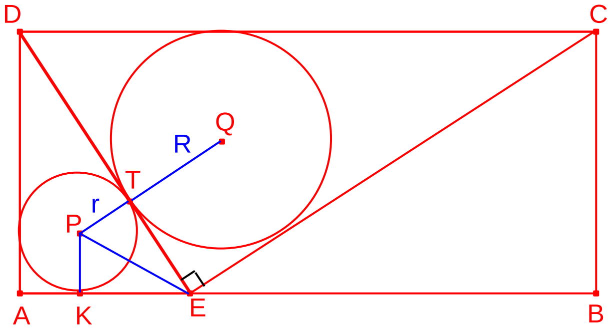
angleAOB=45º

[OAB]=(1/2)·7²·sqrt(2)/2
[Blava]=Pi·7²-6·[OAB]=49·PI-(147/2)sqrt(2)

4213.- En el rectangle de la figura s'ha dibuixat tres triangles rectangles i dues circumferències inscrites a dos d'ells. Calculeu la proporció
$\frac{R}{r}$



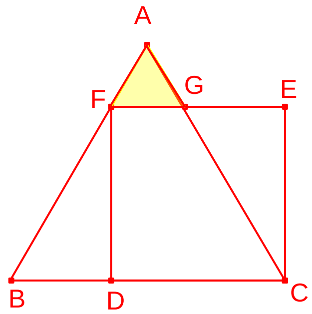
Solució:



Siga el rectangle $ABCD$.
Siga $\overline{DE}=a, \overline{AD}=b, \overline{AE}=c$
Siga $\alpha=\angle AED$
Siga T el punt de tangència comú a les dues circumferències.
$\overline{AK}=\overline{PK}=r, \overline{ET}=\overline{EK}=R$
$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{R}$
Els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{A}E, D\overset{\Delta}{E}C$ són semblants.
Aplicant el teorema de tales:
$\frac{r}{R}=\frac{c}{a}=\cos\alpha$
$\frac{R}{r}=\frac{1}{\cos\alpha}$
$\cos\alpha=\tan\frac{\alpha}{2}$
$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
Elevant al quadrat i simplificant:
$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0$
$\left(\frac{R}{r}\right)^3-\left(\frac{R}{r}\right)^2-\left(\frac{R}{r}\right)-1=0$

$\frac{R}{r}=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}\right)\approx 1.8393$

4214.- En la figura $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter i $DCEF$ un quadrat.
Calculeu la proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AFG}, \overset{\Delta}{ABC}$



Solució:
Siga $\overline{CE} = a$, costat del quadrat.
Siga $\overline{BE} = b$
$\overline{BC} = a + b$

$\overline{BF} = 2 \cdot \overline{BE} = 2b$

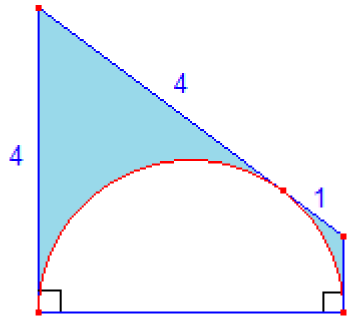
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEF}$:
$3b^2 = a^2$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BDF}, \overset{\Delta}{GEC}$ són iguals.
$\overline{GE} = \overline{BE} = b$
$\overline{FG} = a - b$

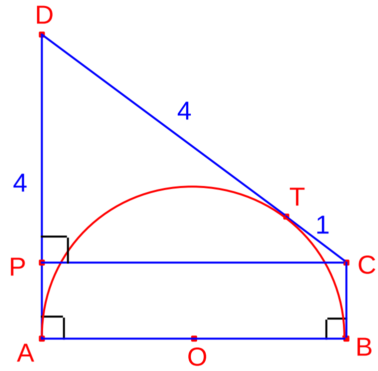
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AFG}$ són equilàter.
Les àrees són proporcionals als quadrats de la proporció dels costats:

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABC}} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{4b^2 - 2\sqrt{3}b^2}{4b^2 + 2\sqrt{3}b^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3}$$

4215.- La figura està formada per un trapezi rectangle i un semicercle.
Calculeu l'àrea ombrejada.

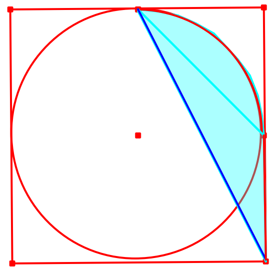


Solució:
Siga el trapezi rectangle $ABCD$.
Els costat $\overline{AD}, \overline{BC}$ són tangents a la semicircumferència.
$\overline{BC} = \overline{CT} = 1$
siga P la projecció de C sobre el costat $\overline{AD}$
$\overline{DP} = 3, \overline{CD} = 5$

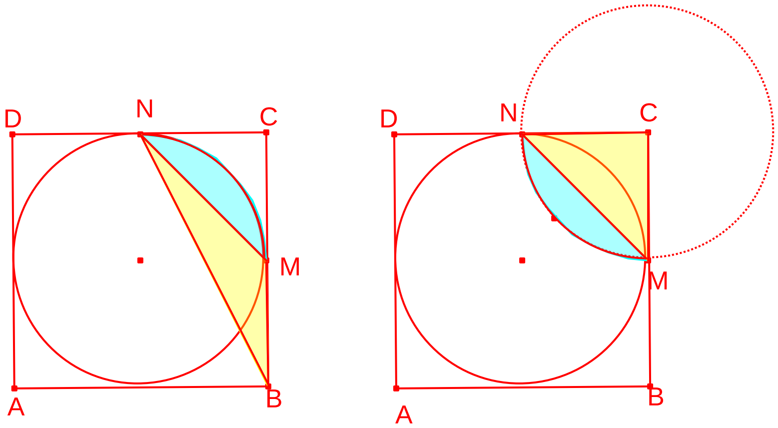


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DPC}$:
$\overline{AB} = \overline{PC} = 4$
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del trapezi menys l'àrea del semicercle de radi 2:
$S_{ombrejada} = \frac{4+1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2}\pi 2^2 = 10 - 2\pi \approx 3.7168$

4216.- La figura està formada per un quadrat i la circumferència inscrita.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:



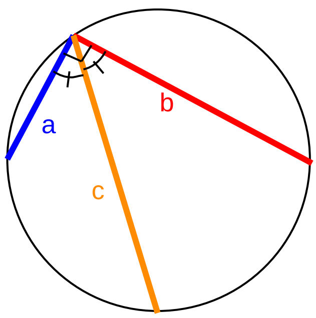
AB=2 [BMN]=[MCN]

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea d'un quadrant de radi 1

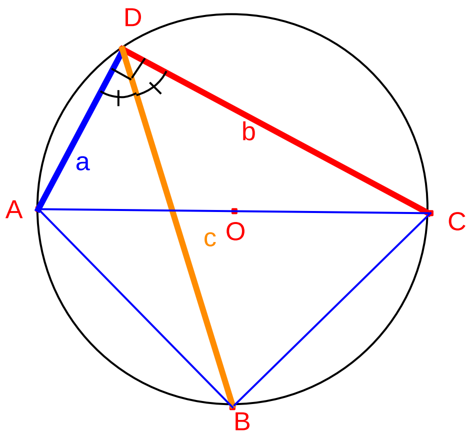
La proporció d'àrees és

[Ombrejada]/[ABCD]=PI/16

4217.- La figura està formada per una circumferència i tres cordes.
Calculeu la proporció:
$$\frac{a+b}{c}$$



Solució:

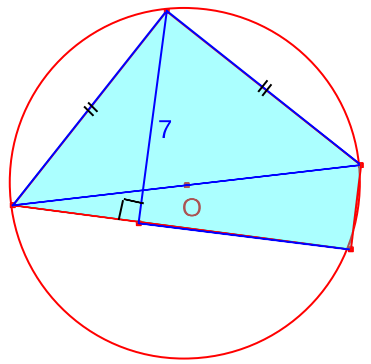


AC=2R

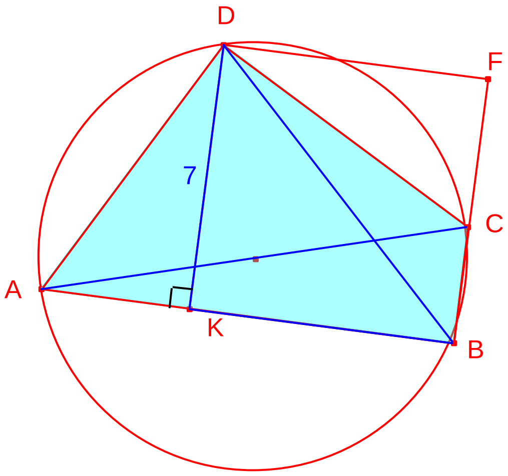
AB=BC=R·sqrt(2)

Teorema Tolomeu
R·sqrt(2)·(a+b)=2R·c
(a+b)/c=sqrt(2)

2118.- La figura està formada per una circumferència de centre O.
Determineu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:



angleKBD=45º

BK=45

angleBAC=x

angleBDC=x

Siga el quadrat KBFD

angleDAK=45º+x

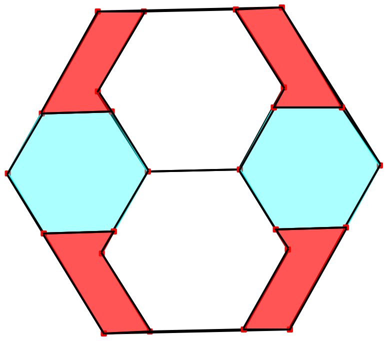
angleFDC=45º-x

angle DCF=45º+x

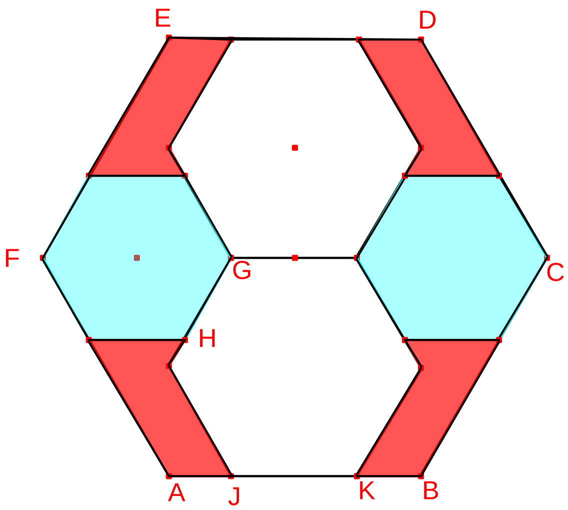
Triangles AKD, CFD iguals

[ABCD]=[KBFD]=49

4219.- La figura està formada per cinc hexàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l'àrea roja i l'àrea blava.



Solució:



[ABCDEF]=P

JK=(1/2)AB

FG=(3/2)AB

GH=(3/4)AB

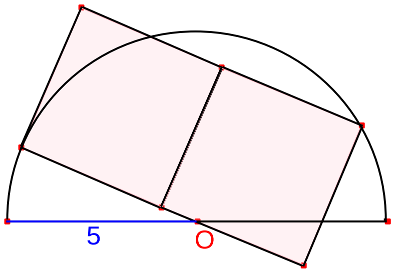
[Blava]=2·(3/4)²·P=(9/32)·P

[Blanca]=2·(1/4)·P

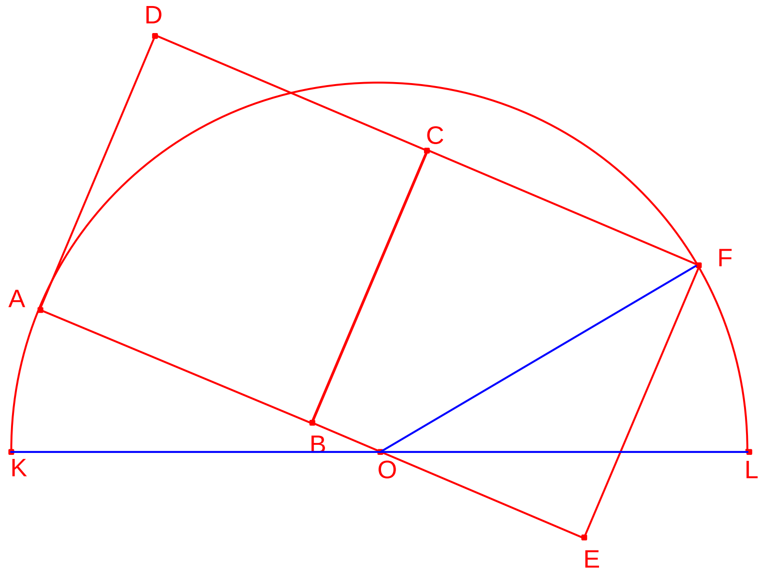
[Roja]=P-([Blava]+[Blanca)=(7/32)·P

[Roja]/[Blava]=7/9

4220.- La figura està formada per una semicircumferència de radi 5 i dos quadrats. Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:



OK=5

AB=c

OE=sqrt(25-c²)

5+sqrt(25-c²)=2c

c=4

[AEFD]=2·4²=32