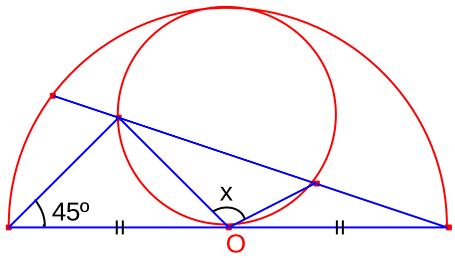
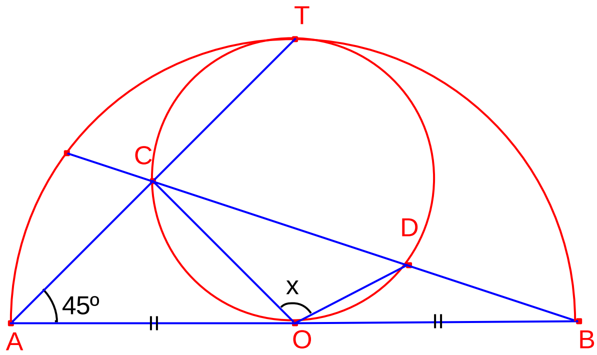
Problemes de Geometria per a l'ESO 423

4221.- La figura està formada per una semicircumferència i una circumferència tangent.
Calculeu la mesura de l'angle $\tan x$



Solució:

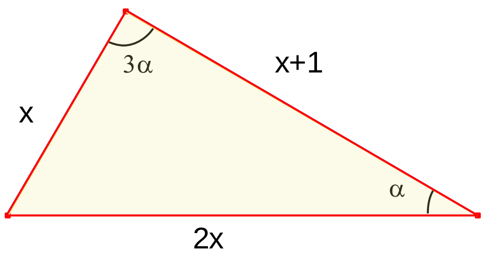


OA=1
A, C, T alineats
angleTCO=90º
angleAOC=45º
AC=OC=sqrt(2)/2

Teorema cosinus COB
BC=sqrt(10)/2

angleOCB=y
Teorema sinus COB
sin y= sqrt(5)/5
tan y=1/2
x=135º-y
tan x = -3

4222.- Determineu el valor x en el triangle de la figura.



Solució:

Teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{2x}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2}{\sin \alpha\,(3 - 4\sin^2 \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30°, 3\alpha = 90°$$

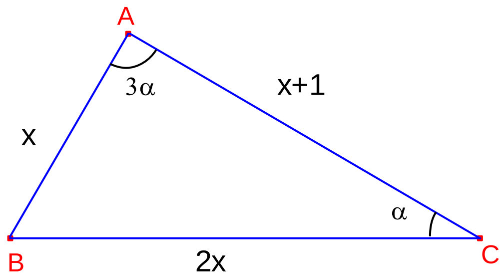
El triangle és rectangle.

aplicant el teorema de Pitàgores:

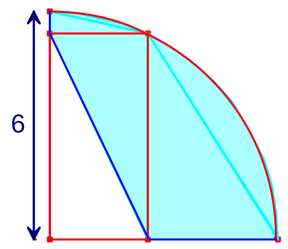
$$4x^2 = x^2 + (x+1)^2$$

$$2x - 2x - 1 = 0$$

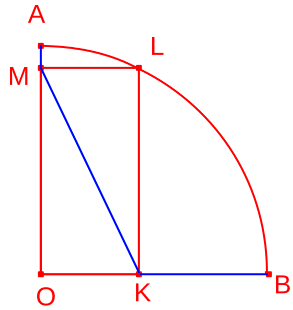
$$x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$



4223.- La figura està formada per un quadrant de radi 6 i un rectangle de perímetre 16.
Calculeu el perímetre i l'àrea de la zona ombrejada.



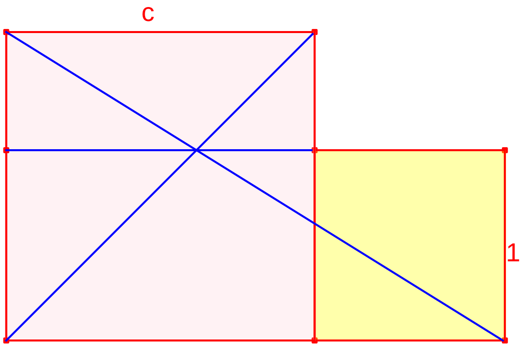
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 6$
Siga el quadrat $OKLM$ de perímetre 16 i costats $\overline{OK} = a, \overline{OM} = 8 - a$
$\overline{MK} = \overline{OL} = 6$



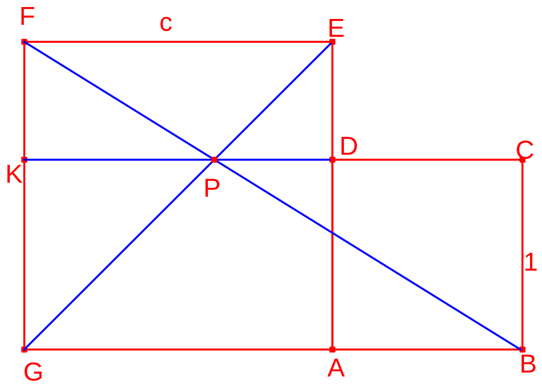
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKM}$:
$36 = a^2 + (8 - a)^2$
$a^2 - 8a + 14 = 0$
Resolent l'equació:
$a = 4 - \sqrt{2}, \overline{OM} = 8 - a = 4 + \sqrt{2}$
El perímetre de zona ombrejada és:
$$P_{ombrejad} = 2 \cdot 6 - (a + 8 - a) + \frac{1}{4} 2\pi \cdot 6 = 4 + 3\pi$$

L'àrea de la zona ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}\pi \cdot 6^2 - \frac{1}{2} a(8 - a) = 9\pi - 7$$

4224.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la mesura del costat c



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $AEFG$ de costat $\overline{AE} = c$
Siga K la projecció de D sobre $\overline{FG}$
Siga P la intersecció de $\overline{EG}, \overline{BF}$ que pertany al segment $\overline{DK}$
$\overline{GK} = \overline{KP} = 1$



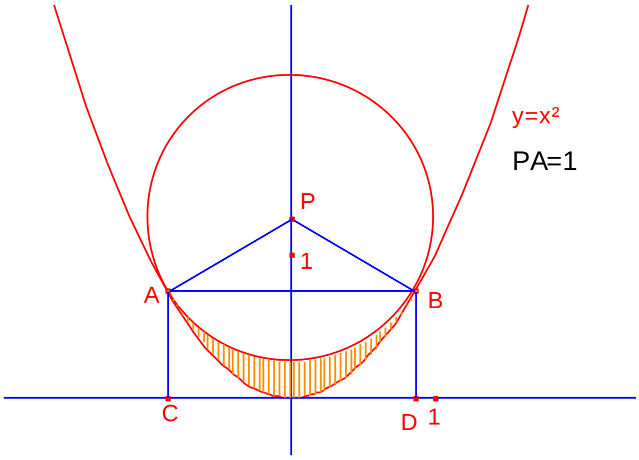
Els triangles rectangles $F\overset{\Delta}{K}P, F\overset{\Delta}{G}B$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{1}{c+1} = \frac{c-1}{c}$$

$$c^2 - c - 1 = 0$$

$$c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

4225.- La figura està formada per la paràbola $y = x^2$ i la circumferència tangent a la paràbola de radi 1. Calculeu l'àrea afitada per les dues corbes.



Solució:
Siga $P(0, c)$ el centre de la circumferència de radi 1
Siga $B(b, b^2)$ el punt de tangència de la circumferència i la paràbola
La recta tangent té pendent:

$y'(b) = 2b$

$\overline{PB} = 1$, la recta PB té pendent $\frac{-1}{2b}$

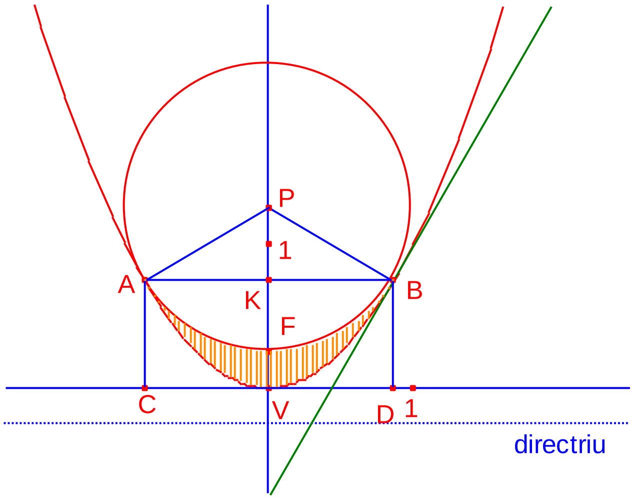
$$\sqrt{b^2 + (b^2 - c)^2} = 1$$

$$\frac{b}{b^2 - c} = \frac{-1}{2b}$$

Resolent el sistema:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}, c = \frac{5}{4}$$

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$$



Siga K el punt mig del segment $\overline{AB}$

$$\overline{PK} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{KV} = \frac{3}{4}, \overline{AB} = \sqrt{3}$$

Aleshores, $\angle APB = 120°$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del segment parabòlic AVB menys l'àrea del segment circular de 120º i radi 1.

L'àrea del segment parabòlic. Aplicant la propietat d'Arquimedes:

$$S_{segmenAVB} = \frac{4}{3} \cdot S_{AVB} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

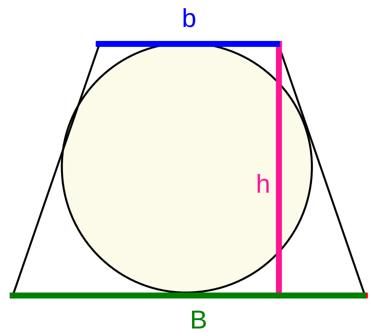
L'àrea del sector és:

$$S_{segmentcir} = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

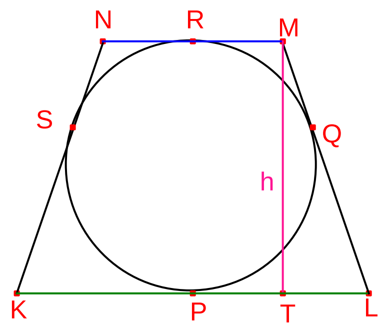
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \approx 0.2518$$

4226.- La figura està formada per un trapezi isòsceles de bases B, b i altura h.
Calculeu:
$$\frac{B^2}{B^2+h^2}+\frac{b^2}{b^2+h^2}$$



Solució:
Siga el trapezi $ABCD$.
Siguen P, Q, R, S els punts de tangència de la circumferència i els costats del trapezi.



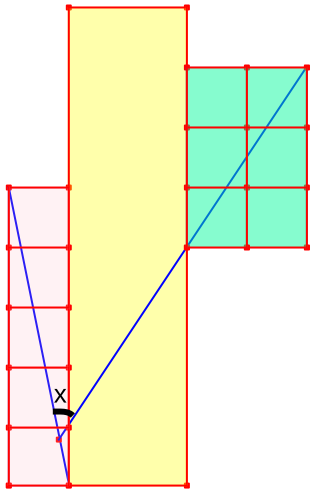
$$\overline{MR}=\overline{MQ}=\frac{b}{2}, \overline{LP}=\overline{LQ}=\frac{B}{2}$$

$$\overline{LT}=\frac{B-b}{2}$$

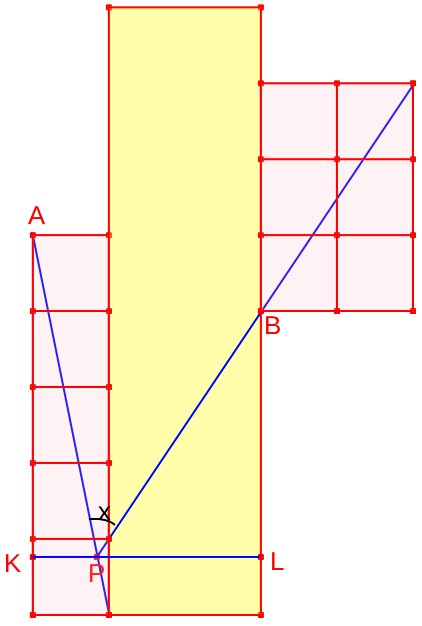
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MTL}$:
$$\left(\frac{B+b}{2}\right)^2=h^2+\left(\frac{B-b}{2}\right)^2$$
Simplificant:
$$h^2=Bb$$

$$\frac{B^2}{B^2+h^2}+\frac{b^2}{b^2+h^2}=\frac{B^2}{B^2+Bb}+\frac{b^2}{b^2+Bb}=\frac{B}{B+b}+\frac{b}{B+b}=1$$

4227.- La figura està formada per tres rectangles.
Els quadrats que es formen són iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



a=angleAPK

b=angleBPL

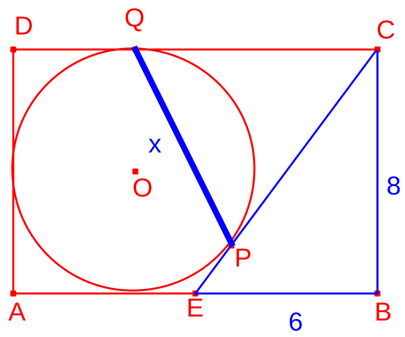
tan a=5

tan b=3/2

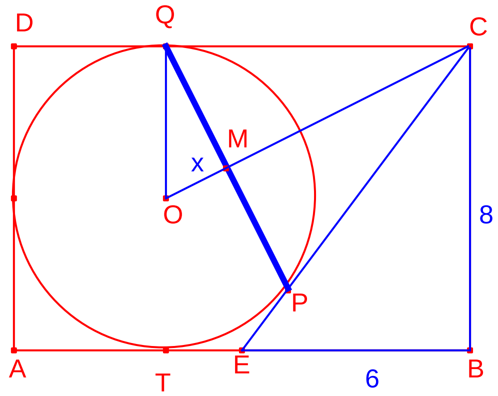
tan(a+b)=(5+3/2)/(1-5·3/2)=-1

x=45º

4228.- La figura està formada per un rectangle i un circumferència tangent a tres costats i a un segment.
Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ} = x$

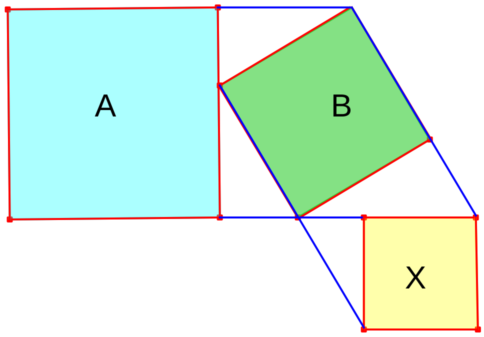


Solució:

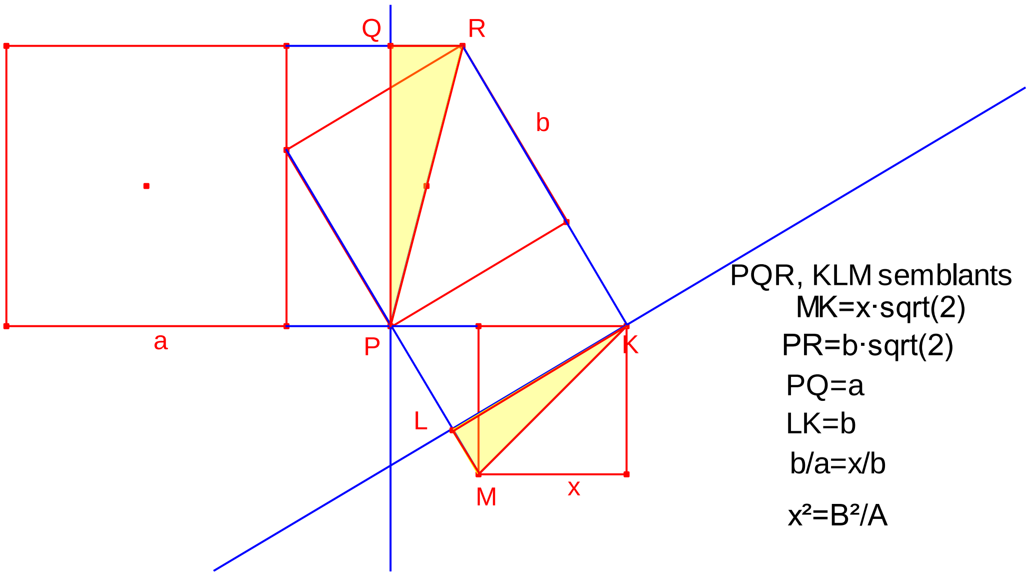


PQ=x
CE=10
EP=ET=y
CQ=CP=10-y
CQ=BT=6+y
10-y=6+y
y=2
OC=4·sqrt(5)
CQO, QMO semblants
(x/2)/8=4/(4·sqrt(5)
x=16/sqrt(5)

4229.- La figura està formada per tres quadrats.
Determineu l'àrea del quadrat X en funció de les àrees dels quadrats d'àrees A, B.



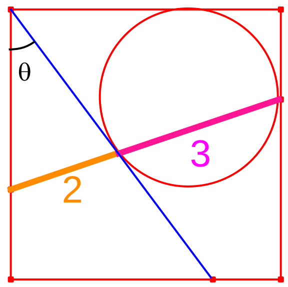
Solució:



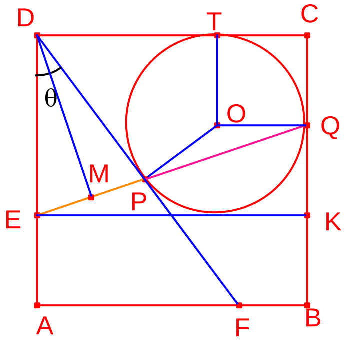
PQR, KLM semblants
MK=x·sqrt(2)
PR=b·sqrt(2)
PQ=a
LK=b
b/a=x/b

$x^2=B^2/A$

4230.- La figura està formada per un quadrat i un cercle tangent a dos costats.
Calculeu la mesura de l'angle θ



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OQ} = \overline{OP} = r$
Siga $\overline{DP} = \overline{DT} = a$
$\angle PDC = 90° - \theta, \angle POT = 90° + \theta$
$\angle OPQ = \frac{1}{2}\theta$
$\angle EPD = \angle PDC = 90° - \frac{1}{2}\theta$



Aleshores, $\overline{DE} = \overline{DP} = a$
$\overline{AE} = r$
$\overline{QK} = a - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EKQ}$:
$25 = 2a^2 + 2r^2$
$\angle QEP = \frac{1}{2}\theta$
Siga M el punt mig del segment $\overline{EP}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EKQ}, \overset{\Delta}{DME}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{1}{a} = \frac{a-r}{5} = \sin\frac{\theta}{2}$
$r = \frac{a^2-5}{a}$
$25 = 2a^2 + 2\left(\frac{a^2-5}{a}\right)^2$
Simplificant:
$4a^4 - 45a^2 + 50 = 0$
Resolent l'equació:
$a = \sqrt{10}$
$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$
$\sin\theta = \frac{3}{5}$
$\theta = \arcsin\frac{3}{5} \approx 36° \, 52' 12"$