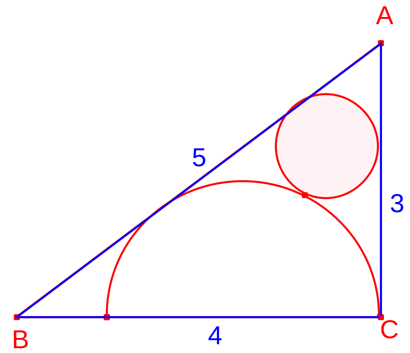
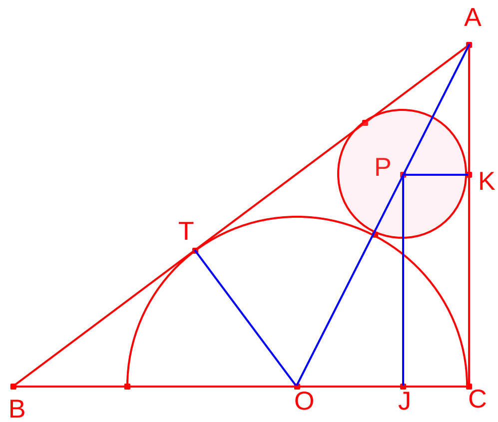
Problemes de Geometria per a l'ESO 424

4231.- En el triangle de costats 3, 4, 5 s'ha dibuixat una semicircumferència i una circumferència tangent a la semicircumferència i a dos costats.
Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:



AC=3, BC=4, AB=5
OT=OC=R
PK=r

AT=AC=3

BT=2

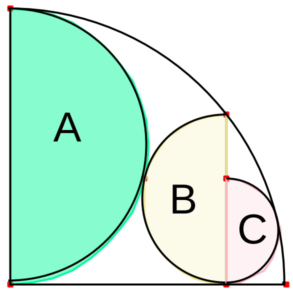
R=OT=2·3/4=3/2
OJP, OCA semblants

PJ=3-2r

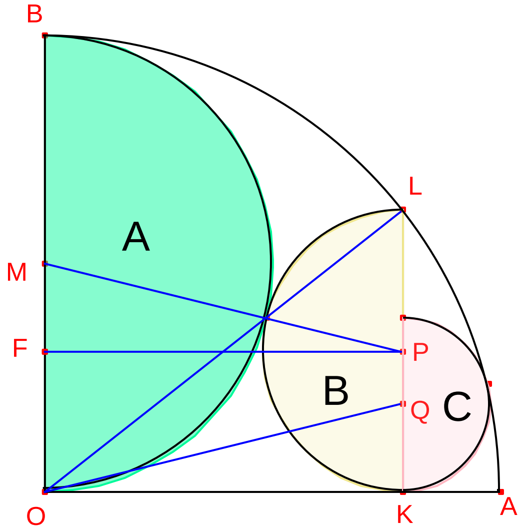
OP=(3/2)+r, OJ=(3/2)-r
Teorema Pitàgores OJP
$(3/2+r)^2=(3/2-r)^2+(3-2r)^2$

r=(9-3·sqrt(5))/4

4232.- La figura està formada per un quadrant i tres semicercles d’àrees A, B, C
Calculeu $A : B : C$



Solució:



OA=2
MO=1

PK=r, QK=s

Teorema Pitàgores MFP, OKL

$(1+r)^2-(1-r)^2=2-4r^2$

r=1/phi

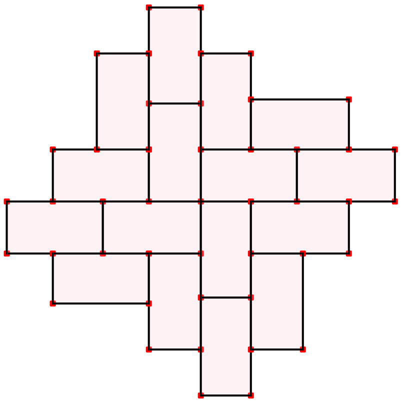
Teorema Pitagores OQK

$(2-s)^2=s^2+4-4r^2$

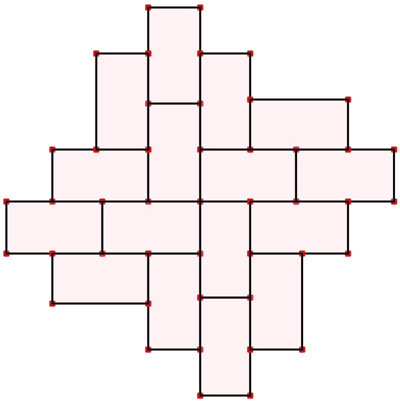
$s=r^2$

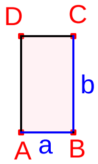
$A : B : C = 1 : r^2 : s^2 = \Phi^4 : \Phi^2 : 1$

4233.- La figura està formada per 16 rectangles iguals que formen un 28-polígon.
Si el perímetre de cada rectangle és 26 i el perímetre del 28-polígon és 136, calculeu l'àrea del 28-polígon.



Solució:





PerímetreABCD

$2a+2b=26$

Perímetre 28-polígon

$2(4b+4b)=136$

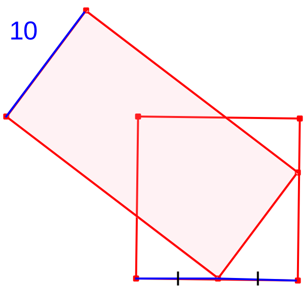
Resolent sistema

$a=9/2,\ b=17/2$

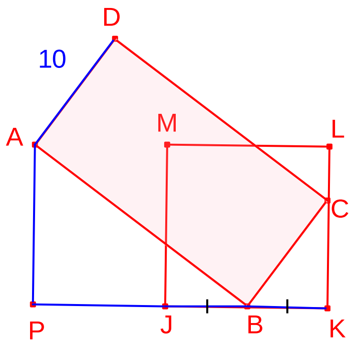
Àrea 28-poligon

$S=16\cdot 9/2\cdot 17/2=612$

4234.- La figura està formada per un quadrat i un rectangle.
Un dels costats del rectangle mesura 10, calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:



JK=2a

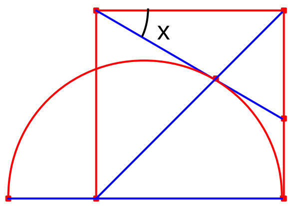
els triangles BKC, APK són semblants

a/(2a)=10/AB

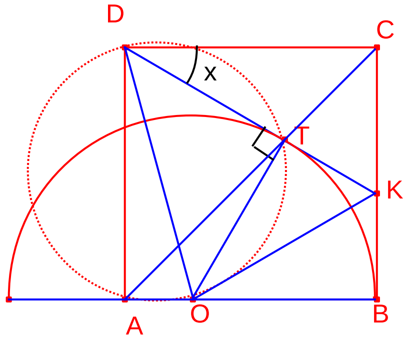
AB=20

[ABCD]=10·20=200

4235.- La figura està formada per un quadrat i una semicircumferència.
Des d'un vèrtex del quadrat s'ha traçat una tangent a la semicircumferència en un punt de la diagonal.
Calculeu la mesura de l'angle x

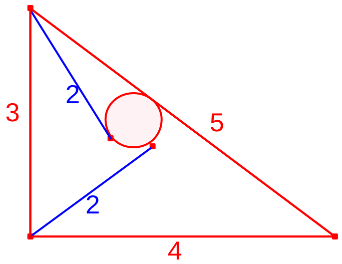


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OB} = \overline{OT} = r$, T pertany a la diagonal $\overline{AC}$
$\angle OTD = 90°$
El quadrilàter $AOTD$ és inscriptible en una circumferència (angles oposats suplementaris)
$\angle DOC = \angle DAC = 45°$
Aleshores, $\overline{DT} = OT = r$
$\overline{OD} = r\sqrt{2}$
$\overline{AO} = c - r$

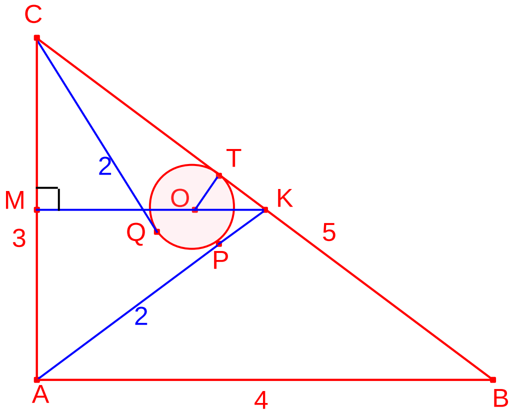


aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAO}$:
$2r^2 = c^2 + (c - r)^2$
Resolent l'equació:
$r = \left(-1 + \sqrt{3}\right)c$
$\overline{AO} = \left(2 - \sqrt{3}\right)r$
Siga $\alpha = \angle ADO$:
$\tan \alpha = 2 - \sqrt{3}$
$\alpha = 15°$
$x = 90° - (45° + \alpha) = 30°$

4236.- La figura està formada per un triangle de costats 3, 4, 5.
Una circumferència és tangent al costat major i des de dos vèrtexs els segments tangents a la circumferència mesuren 2.
Calculeu l'àrea del cercle.



Solució:



OT=r

CT=CQ=2

KP=KT

AK=CK

CM=AM=3/2

CMK, CAB semblants

(3/2)/(2+x)=3/5

x=1/2

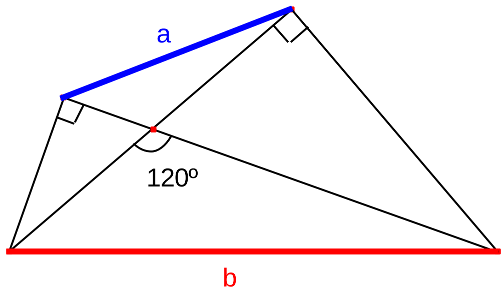
KTO, BAC semblants

r/(1/2)=3/4

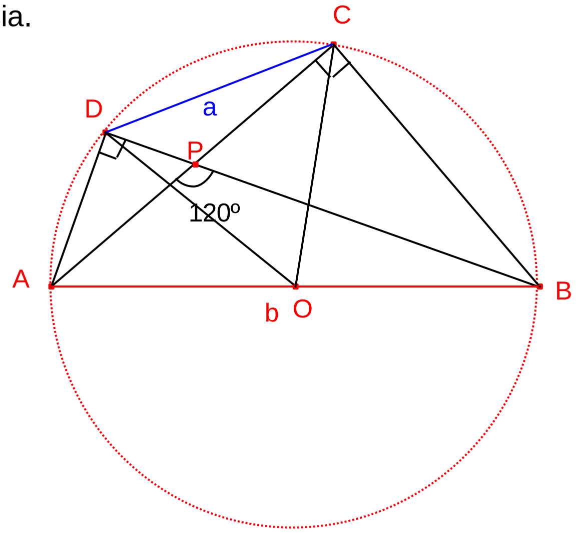
r=3/8

S=(9/64)PI

4237.- La figura està formada per dos triangles rectangles la intersecció dels quals forma un angle de 120º.
Calculeu la proporció dels segments:
$\frac{a}{b}$



Solució:
Siga el quadrilàter $ABCD$, $\overline{AB} = b, \overline{CD} = a$
El quadrilàter és inscriptible en una circumferència de diàmetre $\overline{AB} = b$
siga O el centre de la circumferència.
$\angle APB = 120°$, angle interior de la circumferència.



$\angle APB = 120° = \frac{180° + \angle COD}{2}$

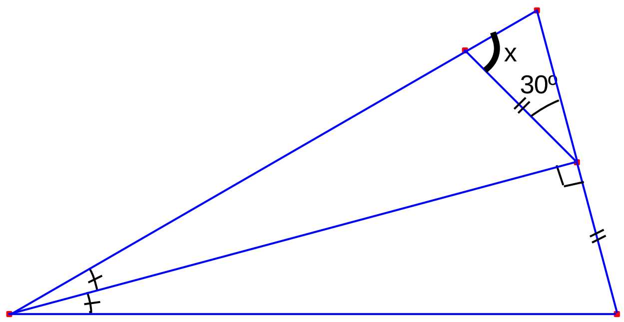
$\angle COD = 60°$

El triangle $\overset{\Delta}{OCD}$ és equilàter:

$a = \frac{1}{2}b$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

4238.- En la figura, calculeu la mesura de l’angle x



Solució:

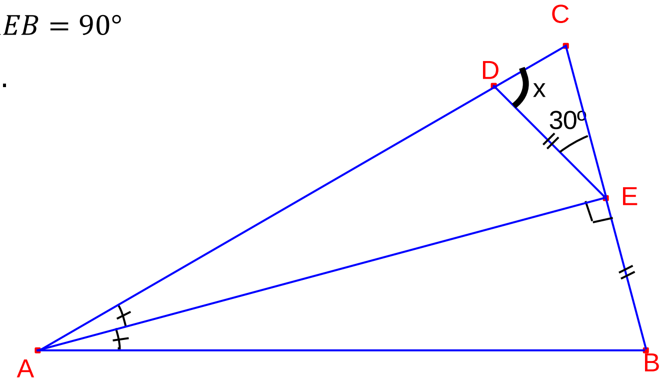
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \angle CAE = \angle BAE, \angle AEB = 90°$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.

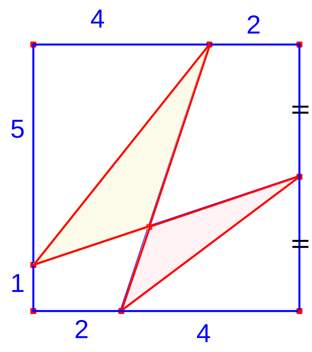
$\overline{BE} = \overline{CE}$

El triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ és isòsceles.

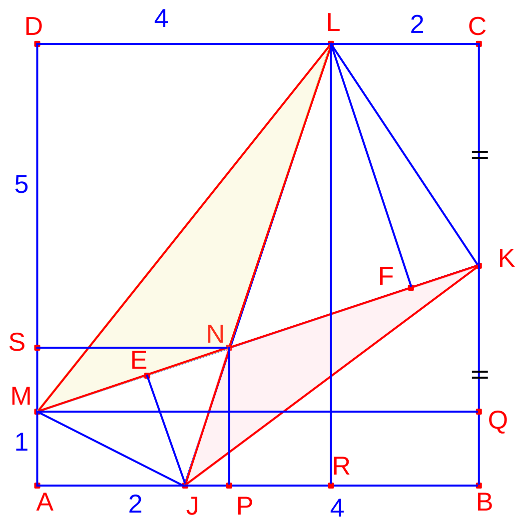
$\angle ECD = \angle CDE = 75°$



4239.- La figura està formada per un quadrat. Determineu la proporció entre les àrees dels dos triangles.

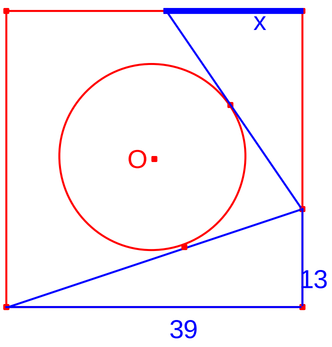


Solució:
$\overline{BK} = \overline{CK} = 3$
Siga R la projecció de L sobre $\overline{AB}$
Siga Q la projecció de M sobre $\overline{BC}$
$\overline{JR} = 2, \overline{QK} = 2$
aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{JRL}, \overset{\Delta}{MQK}$:
$\overline{JL} = 2\sqrt{10}$
$\overline{MK} = 2\sqrt{10}$

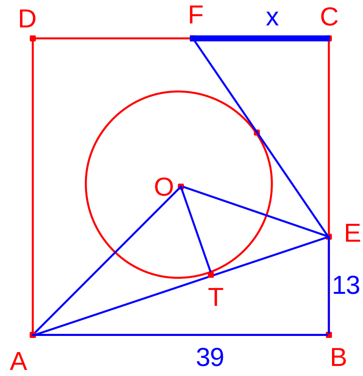


Siga P la projecció de N sobre $\overline{AB}$
Siga S la projecció de N sobre $\overline{AD}$
Siga $\overline{JP} = a$
$\overline{PN} = 3a, \overline{MS} = 3a - 1, \overline{SN} = 2 + a$
$\frac{\overline{SN}}{\overline{MS}} = 3, \frac{2+a}{3a-1} = 3$. Resolent l'equació:
$a = \dfrac{5}{8}$
$\overline{MN} = \dfrac{2+a}{6} 2\sqrt{10} = \dfrac{7}{8}\sqrt{10}, \ \overline{KN} = \dfrac{9}{8}\sqrt{10}$
$\overline{MJ} = \sqrt{5}, \overline{JK} = 5, \overline{ML} = \sqrt{41}, \overline{LK} = \sqrt{13}$
Siga E la projecció de J sobre $\overline{MK}$
Siga $\overline{ME} = b, \overline{KE} = 2\sqrt{10} - b$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{MEJ}, \overset{\Delta}{KEJ}$
$5 - b^2 = 25 - \left(2\sqrt{10} - b\right)^2$. Resolent l'equació:
$b = \dfrac{\sqrt{10}}{2}, \qquad \overline{JE} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$
$S_{KNJ} = \dfrac{1}{2}\overline{KN} \cdot \overline{EJ} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{8}\sqrt{10} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{2} = \dfrac{45}{16}$
Siga F la projecció de L sobre $\overline{MK}$
Siga $\overline{MF} = c, \overline{KF} = 2\sqrt{10} - c$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{MFL}, \overset{\Delta}{KFL}$
$41 - c^2 = 13 - \left(2\sqrt{10} - c\right)^2$
Resolent l'equació:
$c = \dfrac{17\sqrt{10}}{10}, \qquad \overline{LF} = \dfrac{11\sqrt{10}}{10}$
$S_{MNL} = \dfrac{1}{2}\overline{MN} \cdot \overline{LF} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7}{8}\sqrt{10} \cdot \dfrac{11\sqrt{10}}{10} = \dfrac{77}{16}$
La proporció entre les àrees dels triangles és:
$\dfrac{S_{MNL}}{S_{KNJ}} = \dfrac{77}{45}$

4240.- La figura està formada per un quadrat de costat 39 i una circumferència que té el centre en el centre del quadrat i dos segments tangents.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i de costat $\overline{AB} = 39$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = r$
Siga $\overline{BE} = 13$
$\overline{AE} = 13\sqrt{10}$
Siguen $\angle OAB = 45°, \angle EAB = \alpha$
$\tan(45° - \alpha) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$
$\overline{AT} = 2r, \overline{AO} = \frac{39\sqrt{2}}{2}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATO}$:
$r = \frac{39\sqrt{10}}{10}$
$\overline{ET} = 13\sqrt{10} - 2r = \frac{52\sqrt{10}}{10}$

Siga $\angle OET = \beta$
$\tan\beta = \frac{\frac{39\sqrt{10}}{10}}{\frac{52\sqrt{10}}{10}} = \frac{3}{4}$
$\tan 2\beta = \frac{24}{7}$
$\tan(2\beta + 90° - \alpha) = \frac{\frac{24}{7} + 3}{1 - \frac{72}{7}} = -\frac{9}{13}$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FCE}$:
$\frac{x}{26} = -\tan(2\beta + 90° - \alpha) = \frac{9}{13}$
$x = 18$