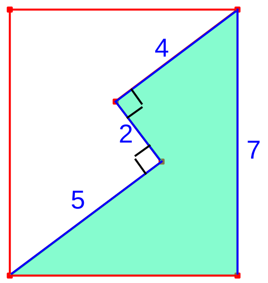
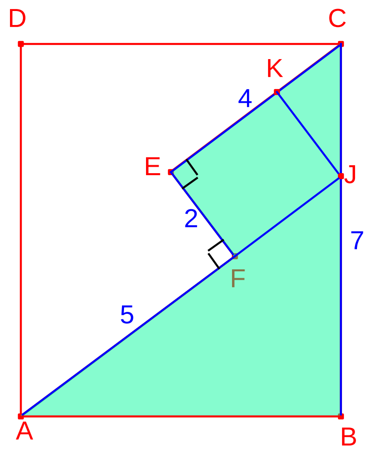
4241.- La figura està formada per un rectangle i un polígon ombrejat.
Calculeu la proporció entre l'àrea del polígon ombrejat i l'àrea del rectangle



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$, $\overline{BC} = 7$
Siguen $\overline{CE} = 4, \overline{CF} = 2, \overline{AF} = 5$
La recta AF talla el costat $\overline{BC}$ en el punt J.
Siga K la projecció de J sobre $\overline{CE}$
Siga $\overline{BJ} = a, \overline{FJ} = b, \overline{AB} = c$



$\overline{CK} = 4 - b, \overline{CJ} = 7 - a, \overline{AJ} = 5 + b$

Els triangles rectangle $\overset{\Delta}{ABJ}, \overset{\Delta}{JKC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{5+b} = \frac{4-b}{7-a}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JKC}$:
$(7-a)^2 = 4 + (4-b)^2$
Resolent el sistema:

$$a = \frac{9}{2}, b = \frac{5}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABJ}$:

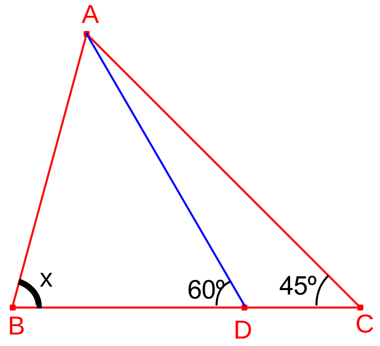
$$x = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = 6$$

L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 6 \cdot 7 = 42$

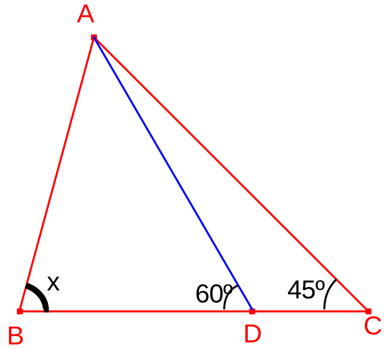
L'àrea del polígon ombrejat $ABCEF$ és:

$$S_{ABCEF} = S_{CEFJ} + S_{ABJ} = \frac{4 + \frac{5}{2}}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{9}{2} = 20$$

4242.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 45°$
Siga D un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{CD}, \angle BDA = 60°$
Calculeu la mesura de l'angle x

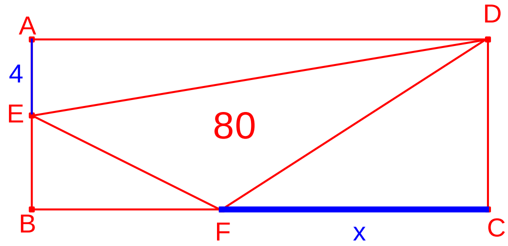


Solució:
Siga $\overline{AD} = 2a, \overline{CD} = a, \overline{AC} = b$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3a}{\sin(45° + x)}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$$\frac{b}{\sin 60°} = \frac{2a}{\sin(60° + x)}$$
Dividint les dues expressions:
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin(60° + x)}{\sin(45° + x)}$$
Simplificant:
$$\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \cos x + 3 \cdot \sin x}{2 \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x}$$
$$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin(45° + x)}$$
$$\sqrt{3} \cdot \cos x = \left(2\sqrt{3} - 3\right) \sin x$$
$$\tan x = 2 + \sqrt{3}$$
$$x = 75°$$

4243.- La figura està formada pel rectangle $ABCD$ d'àrea 216 i el triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ d'àrea 80.
si $\overline{AE} = 4$ calculeu la mesura del segment $\overline{FC} = x$



Solució:
Siga $\overline{BE} = a, \overline{BF} = b$

$$4 + a = \frac{216}{b + x}$$

$$a = \frac{216}{b + x} - 4$$

$$S_{ADE} + S_{EBF} + S_{FCD} = 216 - 80 = 136$$

$$\frac{1}{2}(4(b + x) + ab + (4 + a)x) = 136$$

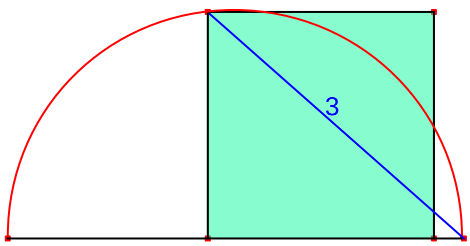
$$4(b + x) + \left(\frac{216}{b + x} - 4\right)b + \frac{216}{b + x}x = 272$$

$$4x + \frac{216}{b + x}(b + x) = 272$$

$$4x = 56$$

$$x = 14$$

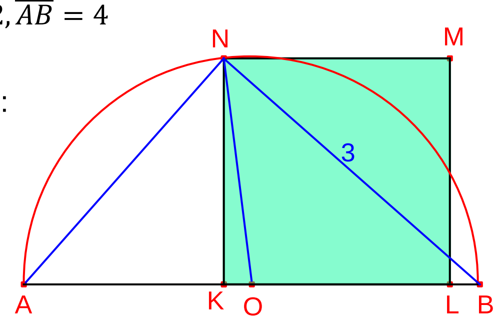
4244.- En una semicircumferència de radi 2 s'ha dibuixat un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:

Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = 2, \overline{AB} = 4$

Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KN} = c$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANB}$:

$\overline{AN} = \sqrt{7}$

Siga $\overline{AK} = x$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKN}, \overset{\Delta}{NKO}$:

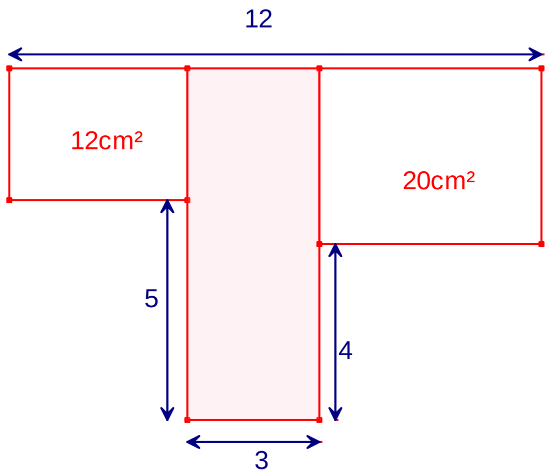
$c^2 = 7 - x^2 = 4 - (2 - x)^2$

$4x = 7$

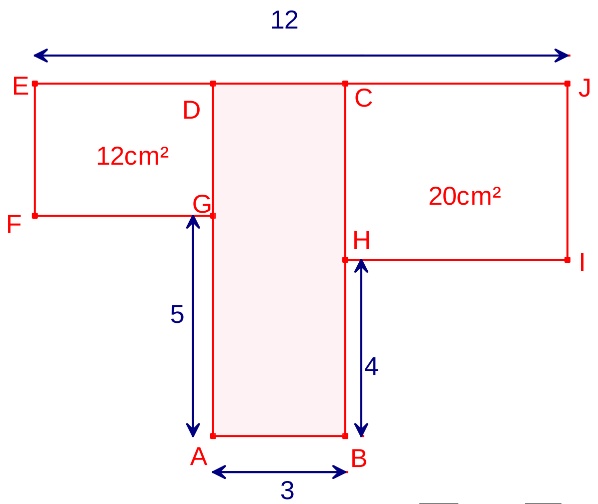
$x = \frac{7}{4}$

$c^2 = 7 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{63}{16}$

4245.- Calculeu l’àrea del rectangle ombrejat.



Solució:



Siga el rectangle $DEFG$ de costats $\overline{DE} = a, \overline{EF} = b$

$\overline{HI} = 9 - a, \overline{CH} = b + 1$

$ab = 12, (9 - a)(b + 1) = 20$

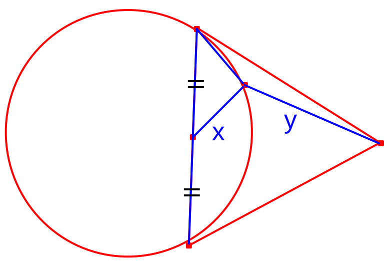
Resolent el sistema:

$a = 4, b = 3$

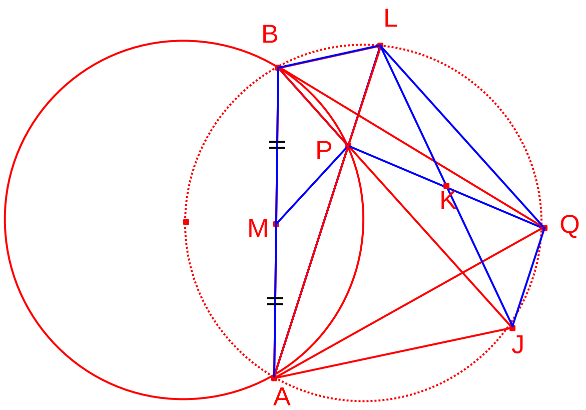
L’àrea del rectangle $ABCD$ és:

$S_{ABCD} = 3(b + 5) = 3 \cdot 8 = 24$

4246.- El triangle equilàter de la figura té dos costats tangents a la circumferència (els vèrtexs són punts de tangència.
Calculeu la proporció entre les longituds dels segments x, y



Solució:



angleBAL=a

angleAPJ=60º

angleBLA=60º

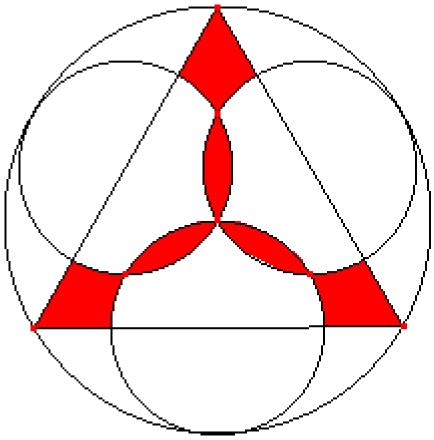
angleQAJ=a

PJQL paral·lelogram

ABP, JPL iguals

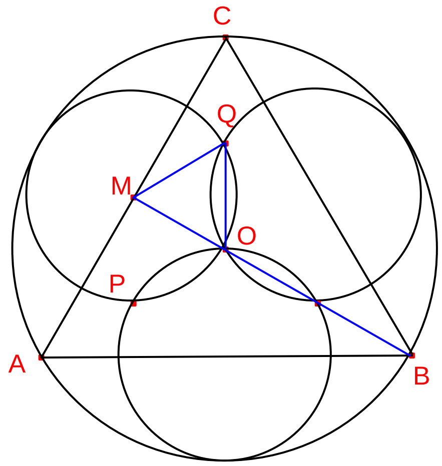
x=PM=PK=y/2

4247.- La figura està formada per quatre circumferències i un triangle equilàter.
El triangle equilàter està inscrit en la circumferència exterior gran.
Les altres tres circumferències són iguals i cadascuna és tangent interior a la circumferència gran.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle gran.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O, centre de la circumferència exterior.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}$
Siga la circumferència de centre M i radi $\overline{MO} = \overline{MP} = \overline{MQ} = 1$
$\angle POQ = 120°$
$\overline{OQ} = 1$
$\overline{MB} = 3, \overline{MA} = \sqrt{3}$
$\overline{OB} = 2$, radi de la circumferència gran.



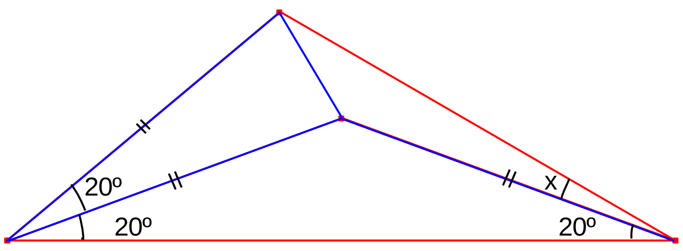
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ menys $\frac{3}{2}$ de cercle de radi 1 més 12 segments circulars de radi 1 i 60º.

$$S_{ombrejada} = 3\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi + 12\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi$$

La proporció d'àrees és:

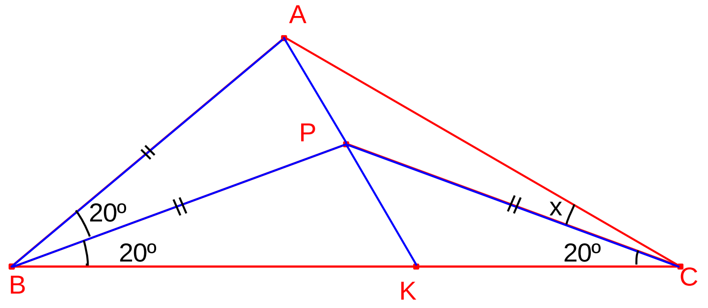
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{4\pi} = \frac{1}{8}\pi$$

4248.- En la figura calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

$\angle BAK = 80°$
$\angle AKB = 60°$
$\angle AKC = 120°$
$\angle KPC = 40°$
$\angle APC = 140°$
$\angle PAC = 40° - x$



Siguen $\overline{AB} = \overline{PC} = b, \overline{AC} = b$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{c}{\sin(20° + x)} = \frac{b}{\sin 40°}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{APC}$:

$$\frac{c}{\sin(40° - x)} = \frac{b}{\sin 140°}$$

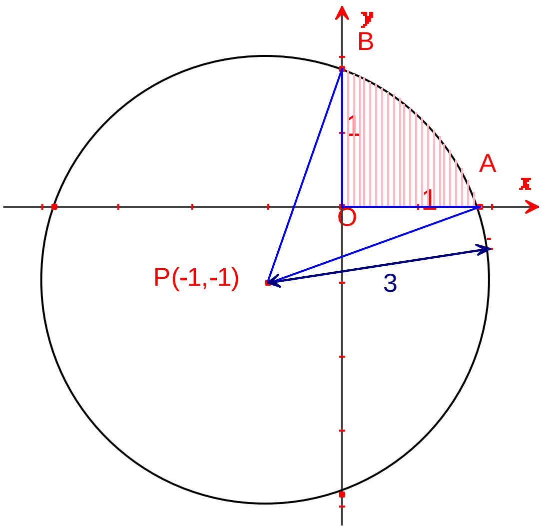
Dividint ambdues expressions:

$$\frac{\sin(40° - x)}{\sin(20° + x)} = 1$$

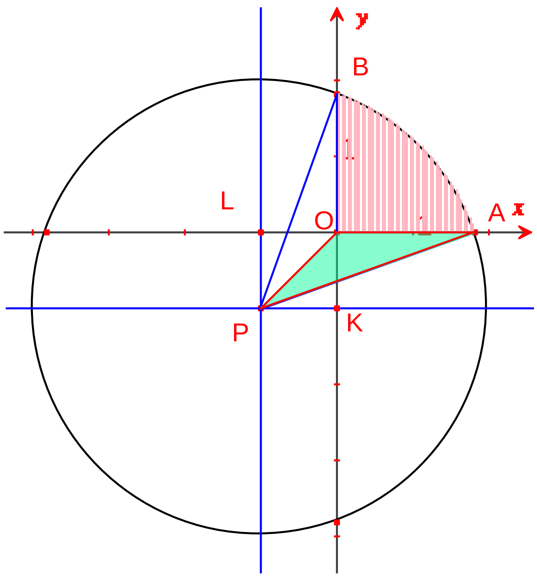
$40° - x = 20° + x$

$x = 10°$

4249.- La figura està formada per una circumferència de centre $(-1,-1)$ i radi 3
Calculeu l'àrea ombrejada



Solució:
Siguen L, K les projeccions de P sobre el eixos coordenats.

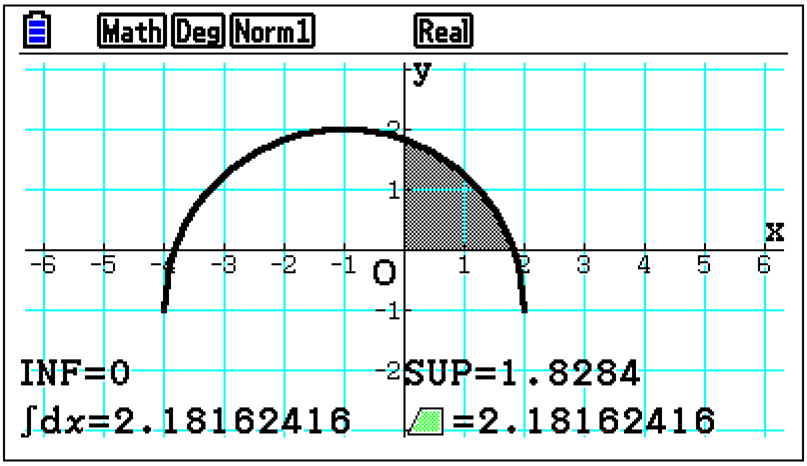


$\overline{LA} = \overline{KB} = 2\sqrt{2}$
$\overline{OA} = \overline{OB} = 2\sqrt{2} - 1$
$\overline{AB} = 4 - \sqrt{2}$
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$
Siga $\alpha = \angle BPM$

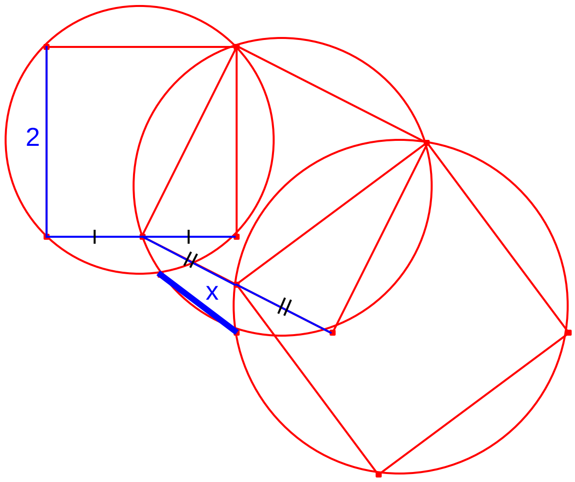
$$\sin\alpha = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del sector de radi 3 i angle $2 \cdot \arcsin\frac{4-\sqrt{2}}{6}$ menys l'àrea de dues vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{POA}$

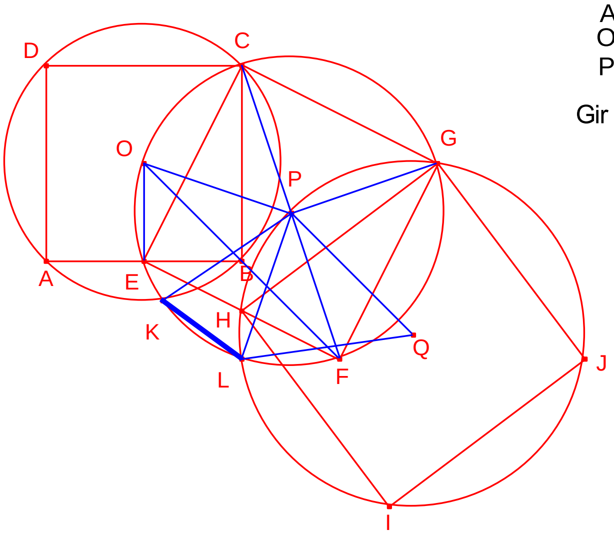
$$S_{ombrejada} = 9 \cdot \arcsin\frac{4-\sqrt{2}}{6} - \left(2\sqrt{2} - 1\right) \approx 2.1816$$



4250.- La figura està formada per tres quadrats i les seues circumferències circumscrites. Calculeu la mesura del segment x



Solució:



x=KL

AB=2

OA=sqrt(2)

PE=sqrt(10)/2

Gir de centere E 90º, transforma OEF en AEC

O, B, F alineats

angle EOF=angleECF=45º

O pertany circumferència centre P

P pertany circumferència centre Q

angleOPK=angleLQP=a

Teorema cosinus OPK

cos a=3/5

x²=10/4+10/4-2·10/4·sin a=1

x=1