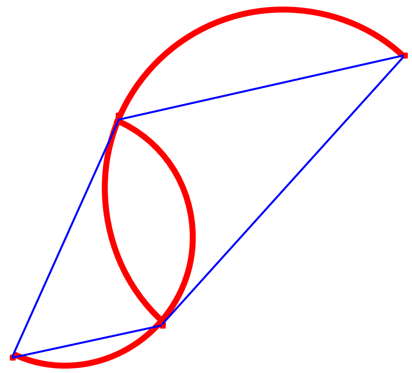
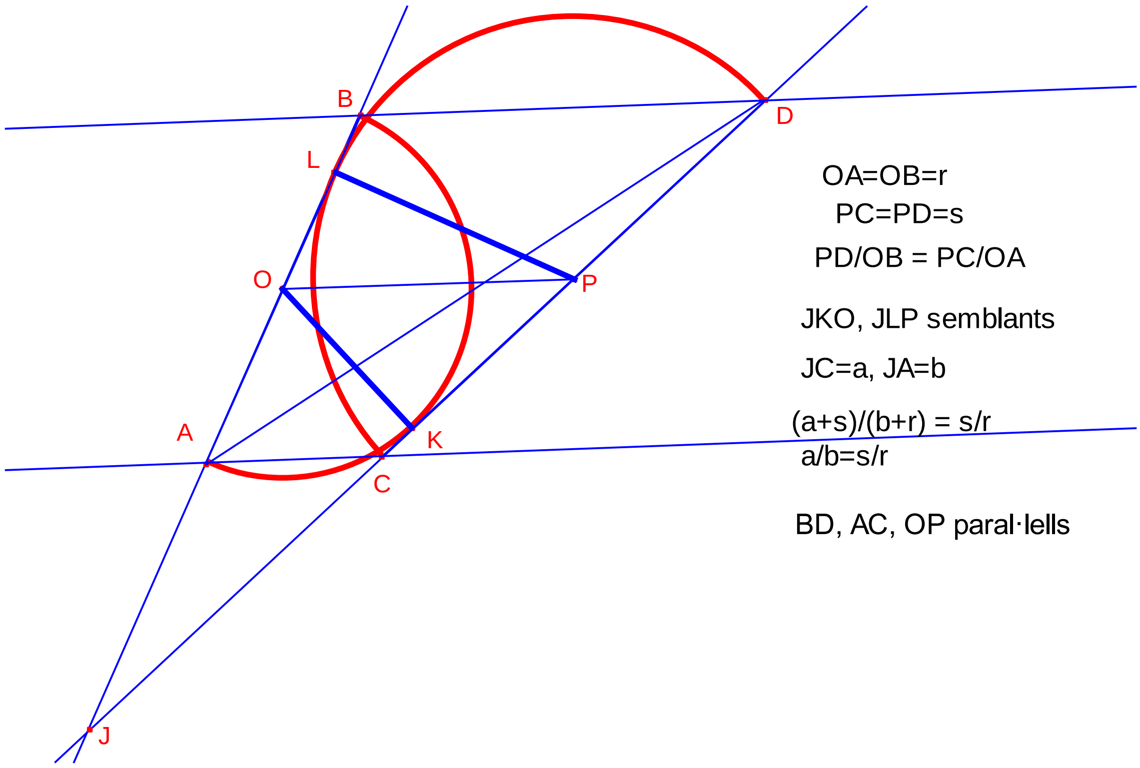
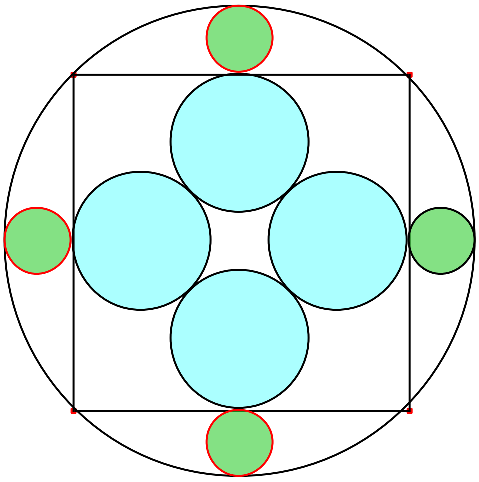
4251.- Dos semicercles són tangents l'un al diàmetre de l'altre. Els segments que connecten els seus vèrtexs són paral·lels?



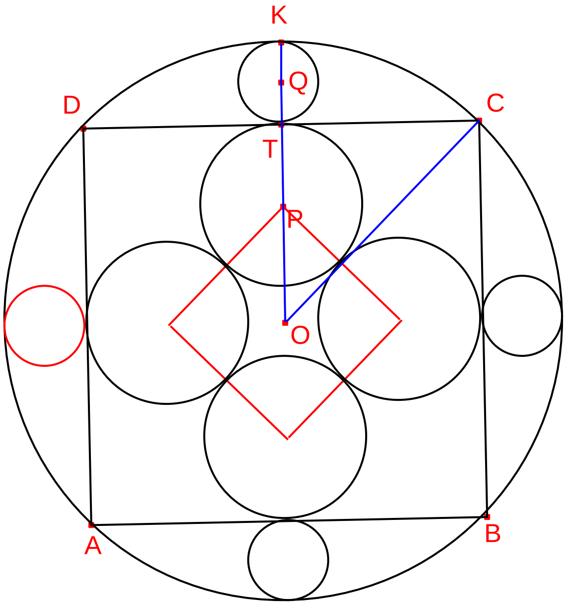
Solució:



4252.- La figura està formada per un quadrat i nou circumferències.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda.



Solució:



OC=R

OP=r

QT=s

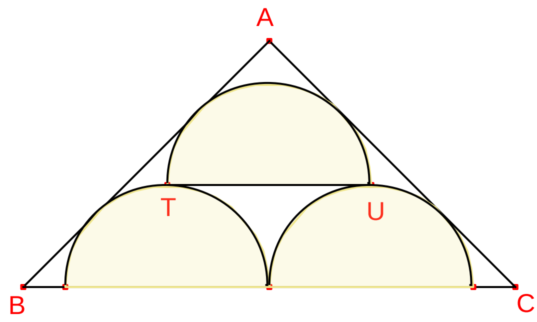
BC=(2+2·sqrt(2))r

R=(2+sqrt(2))r

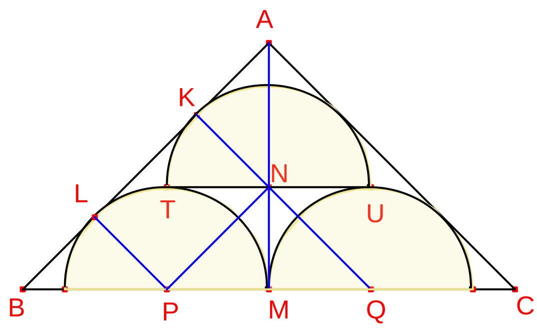
2s=R-(1+sqrt(2))r=r

[Bluva]/[Verda]=r²/s²=4

4253.- La figura està formada per tres semicercle iguals de radi r dins d'un triangle.
$\overline{TU}$ és el segment de tangència i és paral·lel al costat $\overline{BC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Els costats $\overline{AB}, \overline{AC}$ són tangents als semicercles.

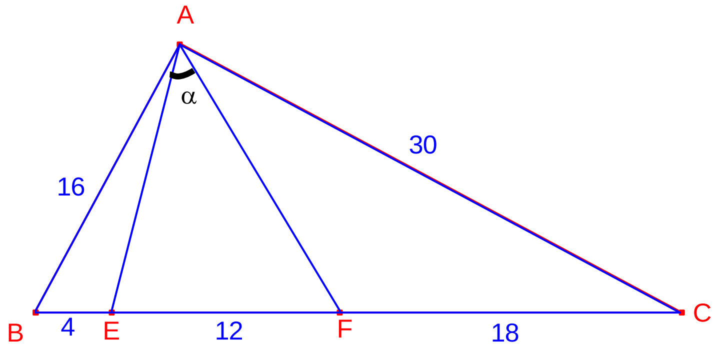


Solució:
$KLPN$ és un rectangle.
$\angle NPM = 45°$
Aleshores, $\angle ABC = 45°$
Anàlogament, $\angle ACB = 45°$
$\angle BAC = 90°$

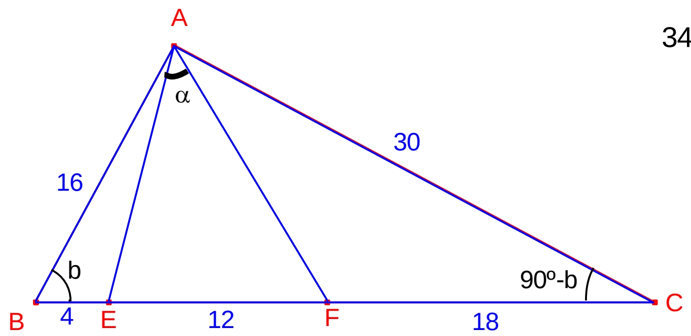


$\overline{AK} = \overline{NK} = r$
$\overline{AN} = r\sqrt{2}$
$\overline{AM} = \overline{BM} = \left(1 + \sqrt{2}\right)r$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$S_{ABC} = \overline{AM}^2 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)r^2$

4254.- En la figura calculeu la mesura de l'angle α



Solució 1:



34²=16²+30², A=90º

angleBFA=angleBAF=90º-b/2

angleAEC=angleEAC=45º+b/2

α+90º-b/2+45º+b/2=180º

α=45

Solució 2:

$\overline{BC} = 34$

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgoes:

$34^2 = 16^2 + 30^2$, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $A = 90°$

$\cos B = \frac{8}{17}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BEA}$:

$\overline{AE}^2 = 16 + 256 - 2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot \frac{8}{17}$

$\overline{AE} = \frac{60}{\sqrt{17}}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BFA}$:

$\overline{AF}^2 = 256 + 256 - 2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot \frac{8}{17}$

$\overline{AE} = \frac{48\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$

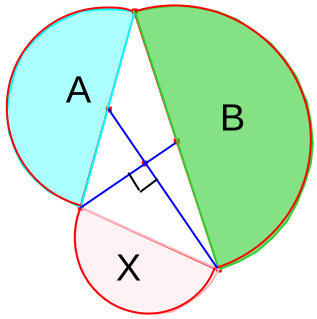
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{EAF}$:

$144 = \frac{3600}{17} + \frac{4608}{17} - 2 \cdot \frac{60}{\sqrt{17}} \cdot \frac{48\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \cos\alpha$

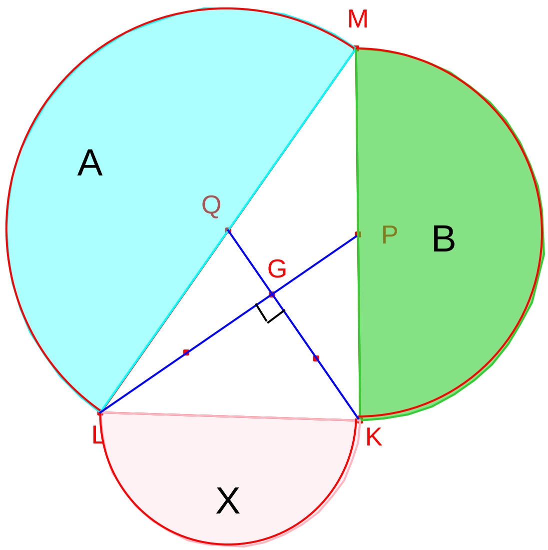
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 45°$

4255.- La figura està formada per tres semicercles sobre els costats d'un triangle.
Els centre de dos semicercles estan connectats amb dos vèrtexs formant un angle recte.
Calculeu l'àrea X en funció de les àrees A, B



Solució



LM=a, KM=b, KL=c

G baricentre

KG=(2/3)·KQ, LG=(2/3)·LP

$KG^2=(2/3)^2\cdot(2b^2+2c^2-a^2)/4$

$LG^2=(2/3)^2\cdot(2a^2+2c^2-b^2)/4$

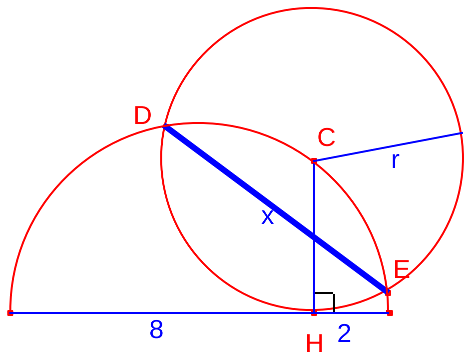
$KG^2+LG^2=c^2$

$9c^2=a^2+b^2+4c^2$

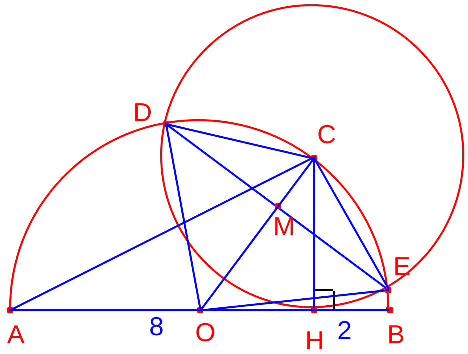
$c^2=(a^2+b^2)/5$

$X=(A+B)/5$

4256.- En la figura el diàmetre del semicircumferència està dividit en dos segments de longituds 8, 2, pel punt H.
C és el centre d'una circumferència de radi r,
Calculeu la mesura del segment $\overline{DE} = x$ intersecció del semicircumferència i de la semicircumferència.



Solució:



Teorema altura ACB

$r^2=CH^2=8\cdot 2$

$r=4$

$DM=ME=x/2$

$CM=b$, $OM=5-b$

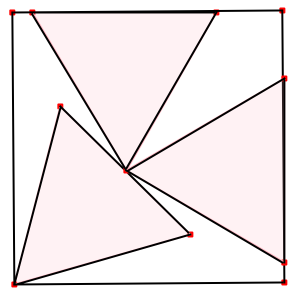
Teorema Pitàgores DMC, OMD

$x^2/4+b^2=16$

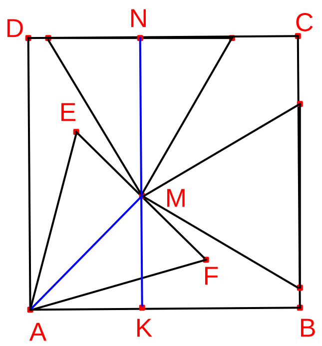
$x^2/4+(5-b)^2=25$

$x=(8/5)\cdot sqrt(21)$

4257.- En un quadrat s'han dibuixat tres triangles equilàters iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{AEF}$ de costat $\overline{AF} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{EF}$
Siguen K, N les projeccions de M sobre els costat $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.



$\overline{AM} = \overline{MN} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

$\overline{KM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{6}}{4}c$

$1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)c$

$c = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)$

L'àrea ombrejada és:

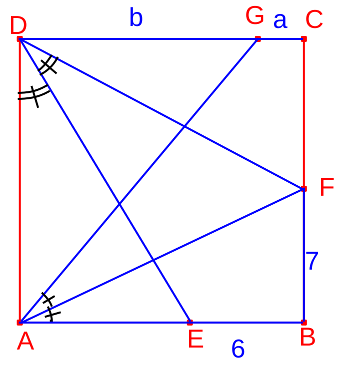
$S_{ombrejada} = 3 \cdot S_{AEF} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6}$

La proporció d'àrees és:

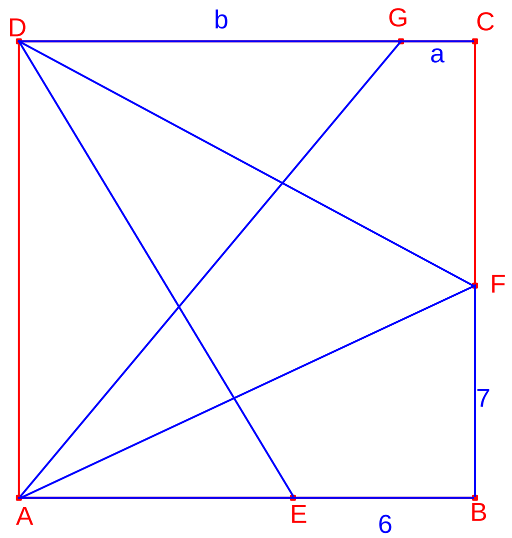
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} \approx 0.5943$

Erich Friedman, 1996

4258.- Donar el quadrat $ABCD$, determineu la proporció:
$$\frac{a}{b}$$



Solució:



angleFAB=angleFAG=m

angle ADE=angleEDF=n

CF=x, AE=x+1

tan n = (x+1)/(x+7)

tan(2n)=(x+7)/x

(x+7)/x = 2tan n /(1-tan²n)

x=8

tan m = 7/(x+7) = 7/15

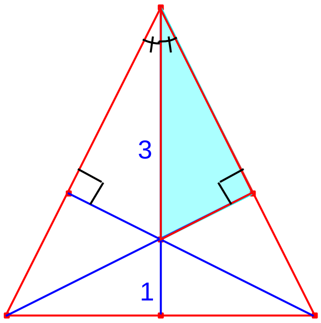
tan(2m)=15/b

b=88/7

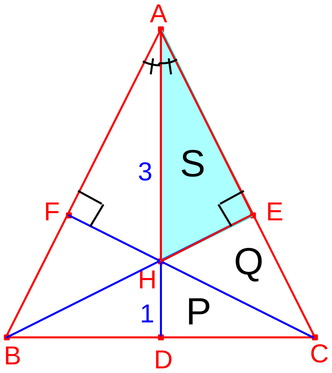
a=15-b=17/7

a/b=17/88

4259.- En la figura calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:



H ortocentre

S+Q=3P

S/Q=(Q+2S)/(2P+Q)

S=(9/5)P, S=(3/2)Q

CE=BF=k, AE=(3/2)k

CD=BD=a

ADC, CFB semblants

2a/k = (5/2)k/a

$a^2=(5/4)k^2$

teorema Pitàgores ADC

$4^2+a^2=(25/4)k^2$

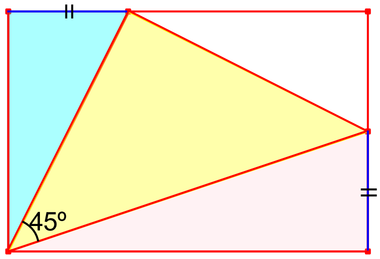
$k^2=16/5$

$a^2=4$

P=(1/2)·2·1=1

S=9/5

4260.- En la figura, determineu la proporció en l'àrea groga i la suma de l'àrea blava i rosa.



Solució:

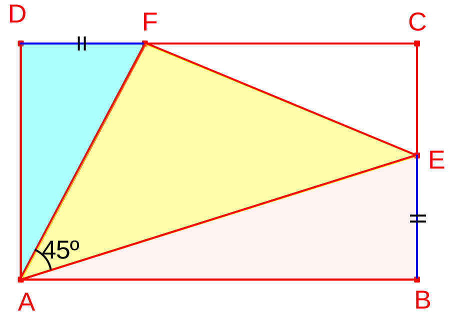
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = c, \overline{AD} = b$

Siga $\overline{DF} = \overline{BE} = a$

Siga $\alpha = \angle DAF =, \angle EAB = 45° - \alpha$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}, \tan(45° - \alpha) = \frac{a}{c}$

$\tan(45° - \alpha) = \frac{1 - \frac{a}{b}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{b-a}{a+b}$



Igualant les expressions:

$c = \frac{a(a+b)}{b-a}$

L'àrea groga és:

$$S_{AEF} = S_{ABCD} - (S_{ADF} + S_{ABE} + S_{FCE}) = bc - \frac{1}{2}(ab + ac + (b-a)(c-a))$$

$$S_{AEF} = b\frac{a(a+b)}{b-a} - \frac{1}{2}\left(ab + a\frac{a(a+b)}{b-a} + (b-a)\left(\frac{a(a+b)}{b-a} - a\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{a(a^2+b^2)}{b-a}$$

La suma de l'àrea blava i rosa és:

$$S_{ADF} + S_{ABE} = \frac{1}{2}(ab + ac) = \frac{1}{2}\left(ab + a\frac{a(a+b)}{b-a}\right) = \frac{1}{2}\frac{a(a^2+b^2)}{b-a}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABCD}} = 1$$