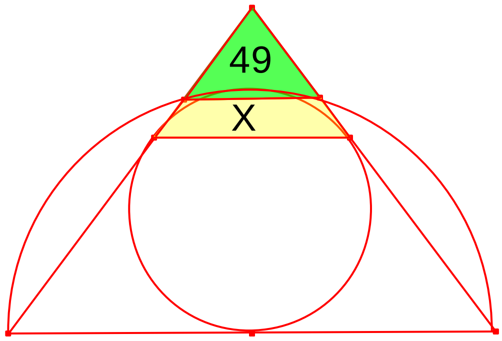
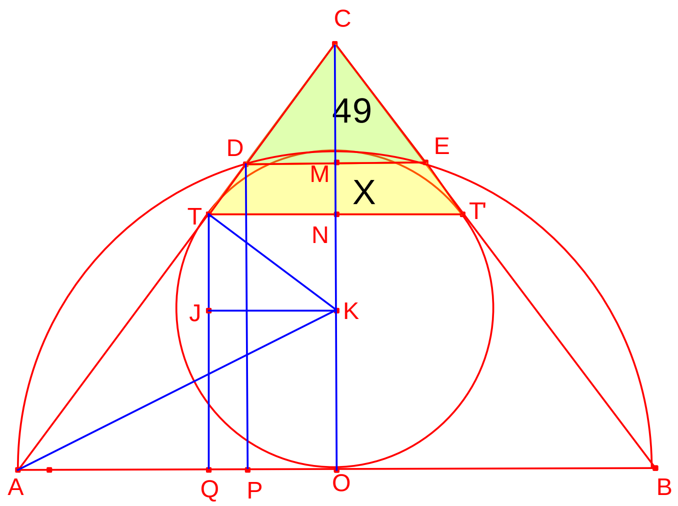
Problemes de Geometria per a l'ESO 427

4261.- La figura està formada per un una circumferència i una circumferència tangent.
El triangle que té els vèrtex en els extrems dels diàmetre de la semicircumferència i és tangent a la circumferència forma un triangle d'àrea 49 i un quadrilàter d'àrea X.
Calculeu l'àrea X



Solució:



[DEC]=49, [TT'ED]=X

OA=AT=r, KO=r/2
angleKAO=a
tan a=1/2, tan(2a)=4/3

OC=(4/3)r, TQ=(4/5)r, AQ=(3/5)r
TJ=(3/10)r

Teorema Pitàgores TNK

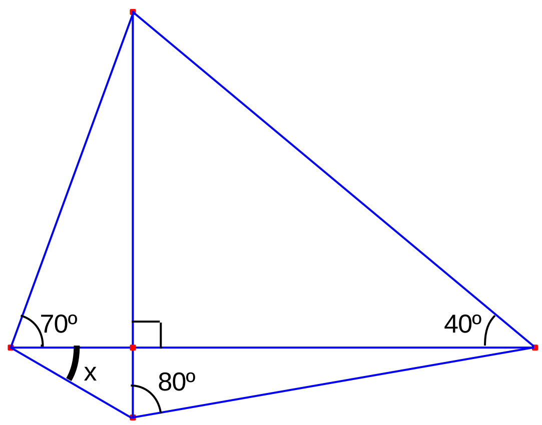
TN=(2/5)r

AP=x, PD=(4/3)x, OP=r-x
Teorema Pitàgores OPD
x=(18/25)r
DM=PO=(7/25)r

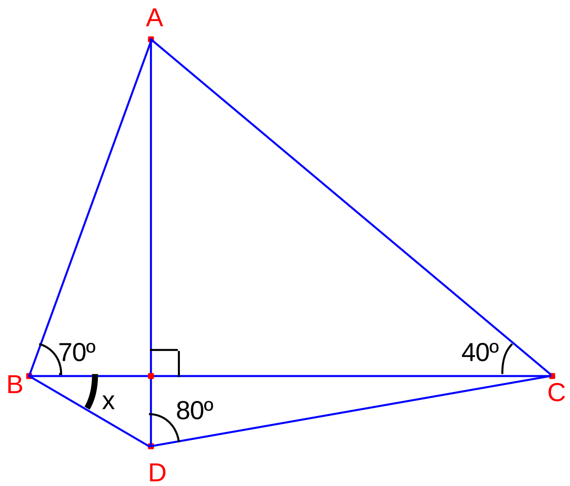
$(49+X)/49 = (TN/DM)^2$

X=51

4262.- En la figura, calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
$\angle BAC = 20°$
$\angle BCD = 10°$
$\angle DAC = 50°$
$\angle DCA = 50°$
Siga $\overline{AD} = \overline{CD} = a$
Siga $\overline{BD} = c$

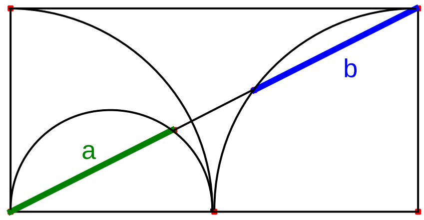


Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$$\frac{a}{\sin(70° + x)} = \frac{c}{\sin 20°}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BDC}$:
$$\frac{a}{\sin x} = \frac{c}{\sin 10°}$$
Dividint ambdues expressions:
$$\frac{\sin x}{\sin(70° + x)} = \frac{\sin 10°}{\sin 20°}$$
$2 \cdot \cos 10° \cdot \sin x = \sin(70° + x)$
$\sin(x - 10°) + \sin(x + 10°) = \sin(70° + x)$
$\sin(x - 10°) = \sin(70° + x) - \sin(x + 10°)$
$\sin(x - 10°) = 2 \cdot \cos(x + 40°) \cdot \sin 30°$
$\sin(x - 10°) = \cos(x + 40°)$
$x - 10° = 90° - (x + 40°)$
$x = 30°$

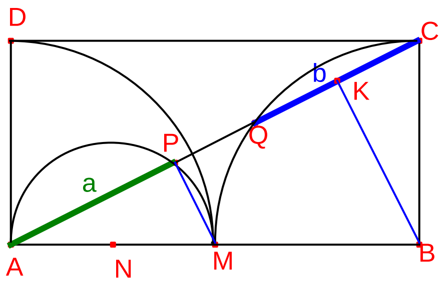
4263.- La figura està formada per un rectangle que conté dos quadrants iguals i una semicircumferència amb el diàmetre sobre el radi d'un quadrant.

Calculeu la proporció:

$$\frac{a}{b}$$



Solució:



AP=a, CQ=b

K punt mig CQ

angleAPM=90º

angle BKC=90º

APM, AKB semblants i de raó 1:2

KB=2·PM

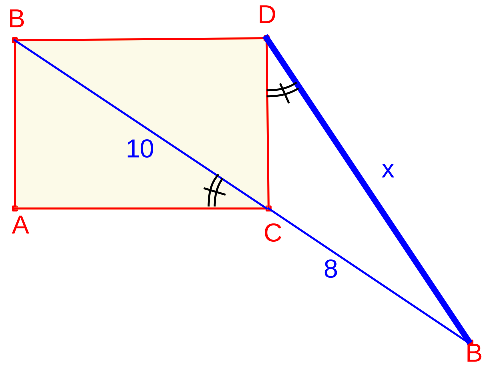
Els triangles APM, BKC són iguals

b/2=PM

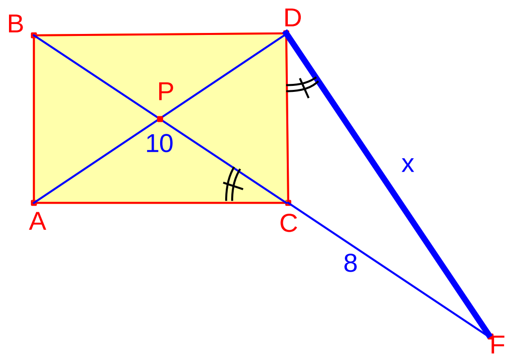
a=KB

a=b

4264.- Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat i la mesura del segment x



Solució:



angleACB=angleCDF
angleACB=angleBDA

angleADF=90º

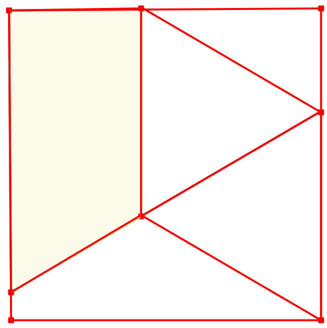
PD=5

PF=15
x=DF=12

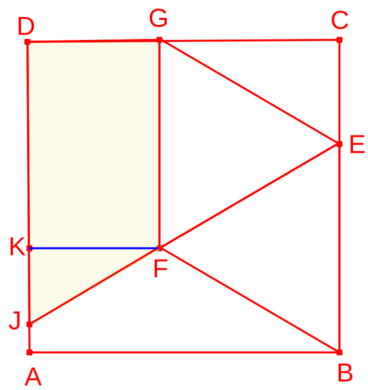
[FDP]=12·5/2=30

[ABDC]=4·[CDP]=4·(5/13)·[FDP]=600/13

4265.- La figura està formada per un quadrat i dos triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.



Siguen els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEF}, \overset{\Delta}{FEG}$ de costat $\overline{BE} = c$

$\overline{CE} = \frac{1}{2}c, \overline{CG} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

$\overline{BC} = \frac{3}{2}c, \overline{DG} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}c$

Siga K la projecció de F sobre $\overline{AD}$

$\overline{KF} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}c$

$\overline{JK} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{FK} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}c$

L'àrea del trapezi $JFGD$ és:

$$S_{JFGD} = S_{KFGD} + S_{JKF} = c \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{2}c + \frac{1}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{2}c \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}c = \frac{3}{4}c^2$$

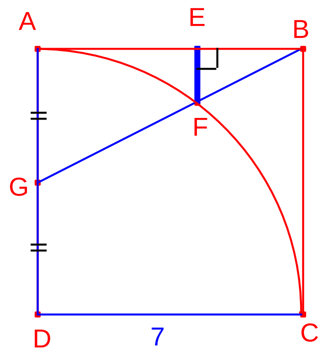
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = \frac{9}{4}c^2$$

La proporció d'àrees és:

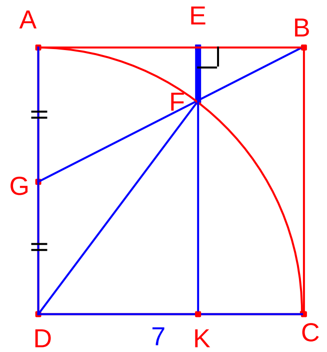
$$\frac{S_{JFGD}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{3}{4}c^2}{\frac{9}{4}c^2} = \frac{1}{3}$$

4266.- La figura està formada per un quadrat i un quadrant de costat 7.
Calculeu la mesura del segment $\overline{EF}$



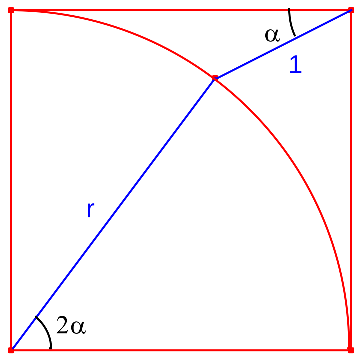
Solució:
Siga $\overline{EF} = a$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BAG}, \overset{\Delta}{BEF}$ són semblants.
aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BE} = 2a$
Siga K la projecció de F sobre $\overline{CD}$.
$\overline{FK} = 7 - a, \overline{DK} = 7 - 2a$

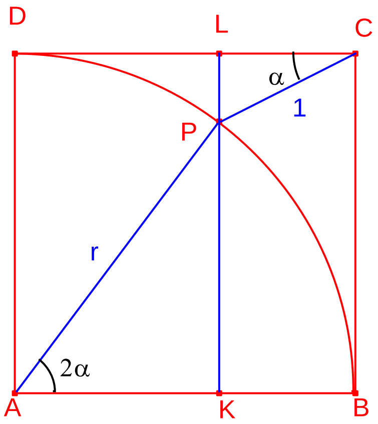


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKF}$:
$49 = (7 - a)^2 + (7 - 2a)^2$
Simplificant:
$5a^2 - 42a + 49 = 0$
Resolent l'equació:
$a = \overline{EF} = \dfrac{7}{5}$

4267.- La figura està formada per un quadrat i un quadrant.
Calculeu la mesura del segment r



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = r$
Siguen K, L les projeccions de P sobre els costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
Siga $\overline{PL} = a$



$\sin\alpha = a$

$\sin 2\alpha = \dfrac{r-a}{r}$

$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2a\cdot\sqrt{1-a^2}$

Igualant les expressions:

$2a\sqrt{1-a^2} = \dfrac{r-a}{r}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKP}$:

$r^2 = r^2 + a^2 - 2ar + r^2 + 1 - a^2 - 2r\sqrt{1-a^2}$

$2r\sqrt{1-a^2} = r^2 - 2ar + 1$

$r^2 - 2ar + 1 = \dfrac{r-a}{a}$

$2ra^2 - (2+r^2)a + r = 0$

Resolent l'equació:

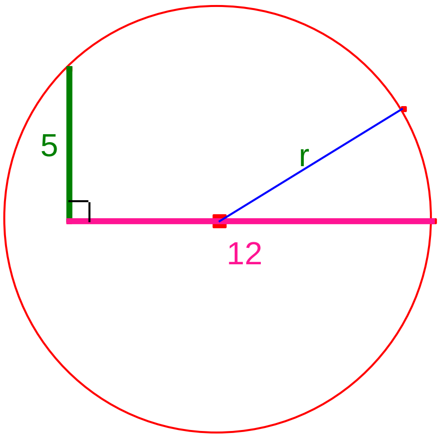
$a = \dfrac{1}{r}$

$\dfrac{r-\frac{1}{r}}{r} = 2\dfrac{1}{r}\sqrt{1-\dfrac{1}{r^2}}$

$r^2 - 1 = 2\sqrt{r^2-1}$

$r = \sqrt{5}$

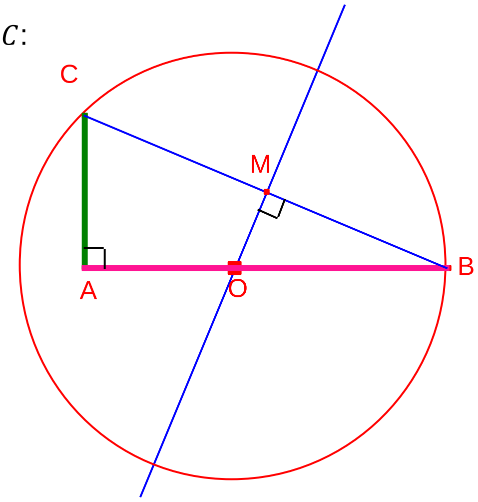
4268.- Dos segments perpendicular dins d'una circumferència mesuren 12, 5.
El segment que mesura 12 passa pel centre.
Calculeu el radi r de la circumferència.



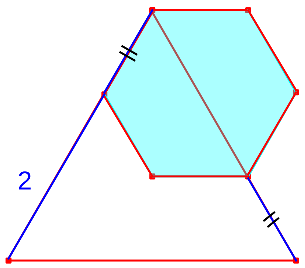
Solució:
Siga $\overline{AB} = 12, \overline{AC} = 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = 13$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OB} = r$
La mediatriu del segment $\overline{BC}$ passa pel centre de la circumferència.
Siga M el punt mig del segment $\overline{BC}$
$\overline{BM} = \frac{13}{2}$

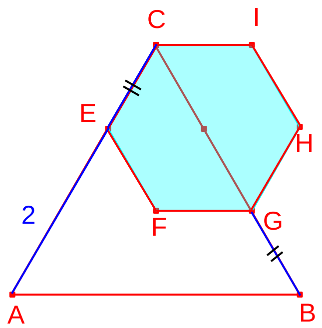
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{MBO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{r}{13} = \frac{\frac{13}{2}}{12}$
$r = \frac{169}{24}$



4269.- La figura està formada per un triangle equilàter i un hexàgon regular.
Calculeu l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:



BG=CE=x

CG=2x

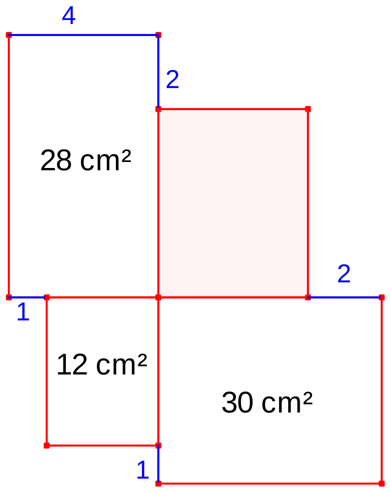
AC=2+x, BC=3x

2+x=3x

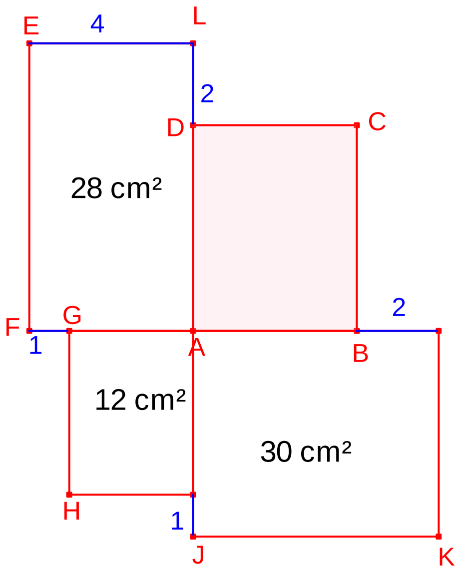
x=1

[CEFGHI]=6·sqrt(3)/4=(3/2)sqrt(3)

4270.- En la figura, calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:



EF=7
AG=3
GH=4
AJ=5
JK=6
AB=JK-2=4
AD=EF-2=5
[ABCD]=20