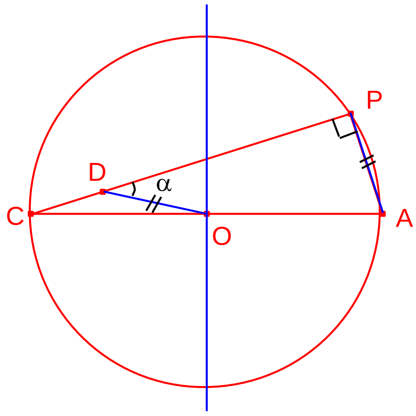
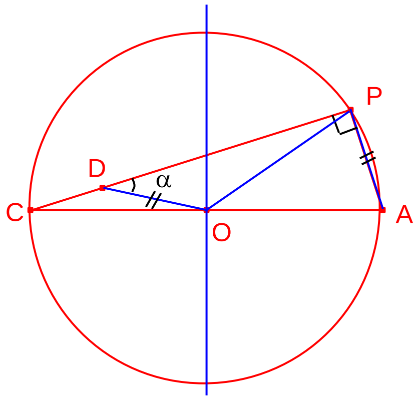
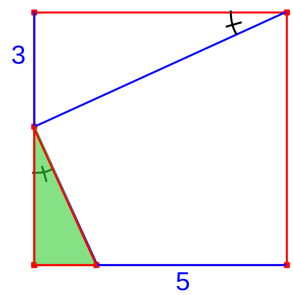
4281.- La figura està formada per una circumferència de centre O i diàmetre $\overline{CA}$
Siguen P un punt de la circumferència i D un punt de $\overline{CP}$ tals que $\overline{AP} = \overline{OD}$
Calculeu la mesura de l'angle $\alpha = \angle PDO$



Solució:
Siga $\overline{OA} = 1$, radi de la circumferència.
Siga $\angle PCA = \angle CPO = \beta$
Siga $\overline{AP} = \overline{OD} = x$
$\frac{x}{2} = \sin\beta$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DOP}$
$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\alpha}$
$\sin\alpha = \frac{1}{2}$
$\alpha = 30°$



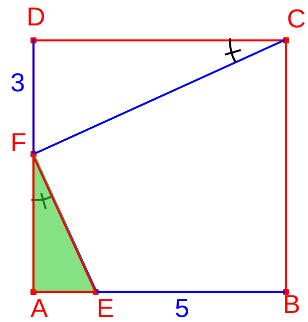
4282.- La figura està formada per un quadrat i dos segments interiors al quadrat que formen angles iguals amb dos costats del quadrat.



Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.

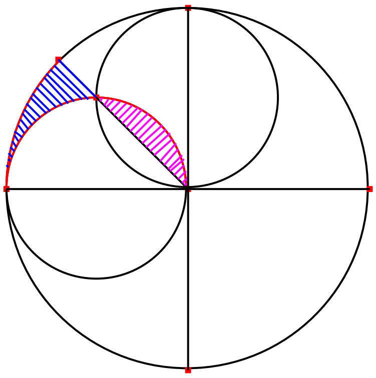
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{AE} = c - 5, \overline{AF} = c - 3$

Els triangles rectangles $C\overset{\Delta}{D}F, F\overset{\Delta}{A}E$ són semblants.

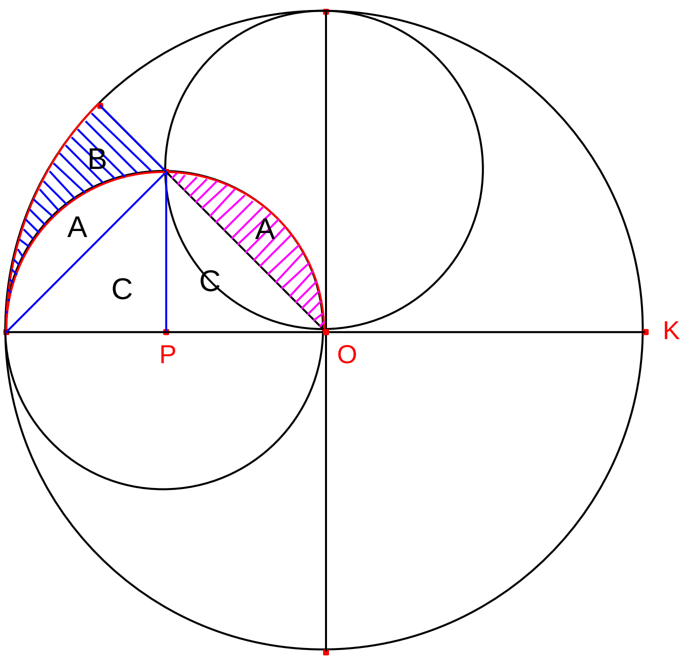


Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{3}{c} = \frac{c-5}{c-3}$
Resolent l'equació:
$c = 4 + \sqrt{7}$
$\overline{AE} = -1 + \sqrt{7}, \overline{AF} = 1 + \sqrt{7}$
L'àrea del triangle ombrejat és:
$S_{AEF} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{7}\right)\left(1 + \sqrt{7}\right) = 3$

4283.- En la figura, dos diàmetres perpendiculars divideixen el cercle en quatre parts iguals..
sobre cascun dels diàmetres es dibuixa un cercle tangent al cercle original que passen pel centre.
Un radi del cercle gran passa pels punts intersecció dels dos cercles menuts.
Demostreu que les regions en blau i en rosa tenen la mateixa àrea.



Solució:



Siga $\overline{OK} = 2$, radi de la circumferència gran.
Siga $\overline{PO} = 1$, radi de la circumferència menuda.
L'àrea de l'octant de centre O i radi 2 és:

$$S_{octant} = A + B + 2C = \frac{1}{8}\pi 2^2 = \frac{\pi}{2}$$

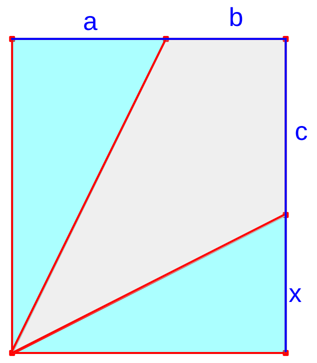
L'àrea del quadrant de centre P i radi 1 és:

$$S_{quadrrant} = A + C = \frac{1}{4}\pi 1^2 = \frac{\pi}{4}$$

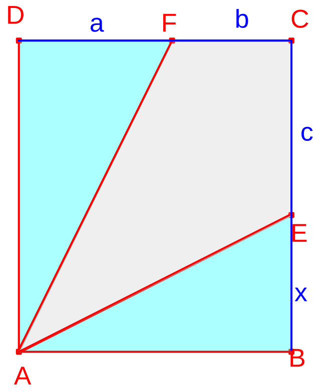
$$2A + 2C = \frac{\pi}{2}$$

Restant les expressions:
$B - A = 0$

4283.- En el rectangle de la figura l'àrea blava és igual a l'àrea grisa.
Determineu el valor x en funció de a, b, c



Solució:



[ABCD]=(a+b)(c+x)

[ADF]+[ABE]=(1/2)(2ax+ac+bx)

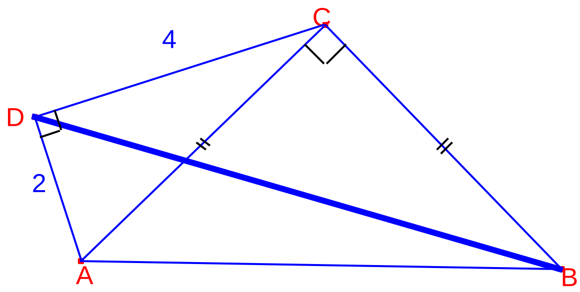
[AECF]=[ABCD]-([ADF]+[ABE])=bc-(1/2)(bc+ac)

[AECF]=[ADF]+[ABE]

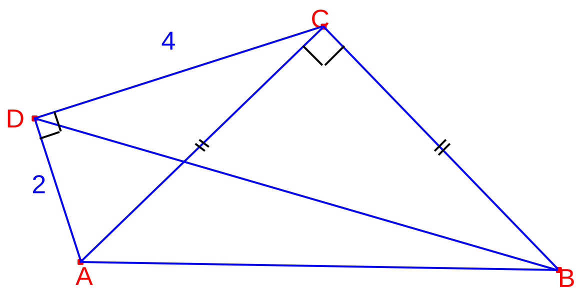
2bc=2ax

x=bc/a

4285.- En el quadrilàter de la figura calculeu la mesura de la diagonal $\overline{BD}$



Solució:



angleACD=a

AC=BC=2·sqrt(5)

Teorema cosinus BCD

BD^2=16+20-2·4·2·sqrt(5)·cos(90º+a)

BD^2=36+16·sqrt(5)·sin(a)=52

BD=2·sqrt(13

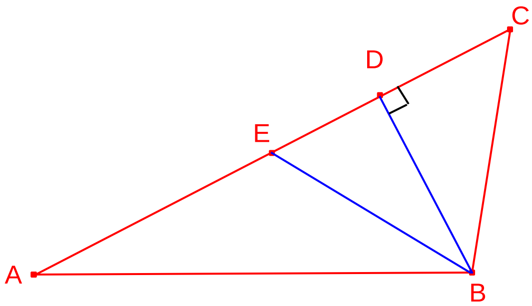
4286.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 2A$

Siga E el punt mig del costat $\overline{AC}$

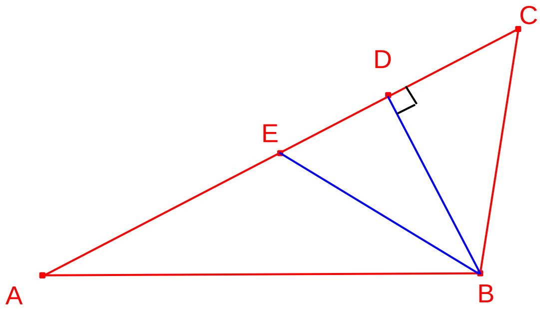
Siga $\overline{BD}$ altura del triangle.

Calculeu:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$$



Solució:



Si C=2A, $c^2=a(a+b)$

DE=y

$4\cdot BE^2=2a^2+2c^2-b^2$

$BE^2=a^2+(1/2)ab-(1/4)b^2$

Teorema Pitàgores ADB

$c^2-(b/2+y)^2=BD^2$

Teorema Pitàgores EDB

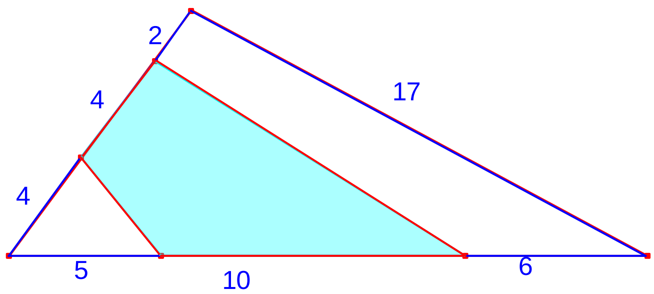
$a^2+(1/2)ab-(1/4)b^2-y^2=BD^2$

$c^2-(b/2+y)^2=a^2+(1/2)ab-(1/4)b^2-y^2$

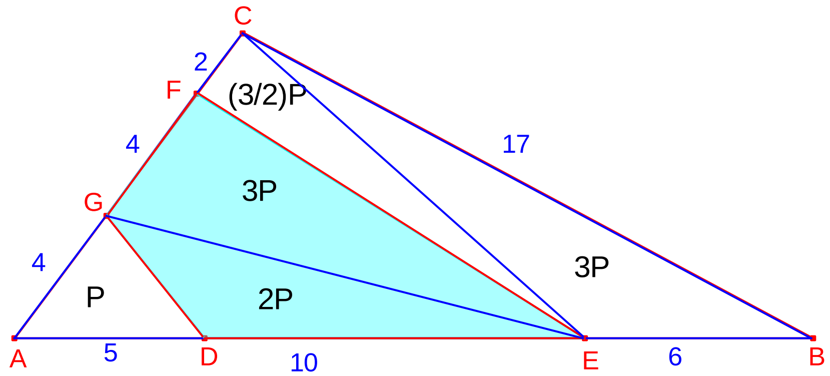
$by=(1/2)ab$

BC/DE=2

4287.- Dos costats d'un triangle s'ha dividit en tres segments desiguals.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = 17, b = 10, c = 21$
Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{48 \cdot 28 \cdot 14 \cdot 6}}{4} = 84$$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.
Siga $P = S_{ADG}$

$S_{DEG} = 2 \cdot S_{ADG} = 2P$

$S_{GFE} = S_{AGE} = 3P$

$S_{FCE} = \frac{1}{4} S_{AFE} = \frac{3}{2} P$

$S_{EBC} = \frac{6}{15} S_{AEC} = 3P$

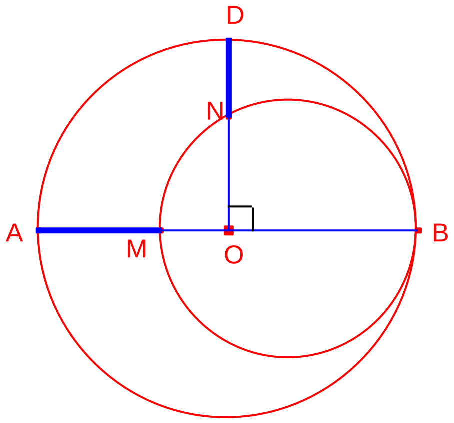
$S_{ABC} = \frac{21}{2} P = 84$

$P = 8$

$S_{DEFG} = 5P = 40$

4288.- La figura està formada per una circumferència gran de centre O i radi 25 i una circumferència tangent interior de radi 17.
Calculeu la proporció:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{DN}}$$



Solució:

$\overline{BM} = 2 \cdot 17 = 34$

$\overline{OM} = 34 - 25 = 9, \overline{OB} = 25$

$\overline{AM} = 2 \cdot 25 - 34 = 16$

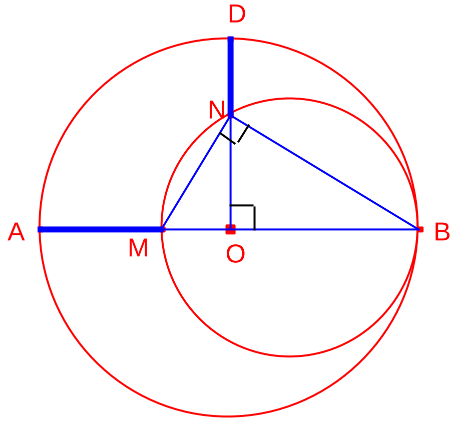
Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNB}$

$\overline{ON}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OB} = 9 \cdot 25$

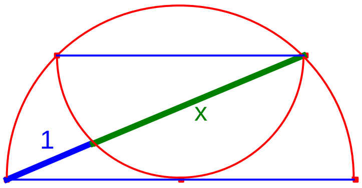
$\overline{ON} = 15$

$\overline{DN} = 25 - 15 = 10$

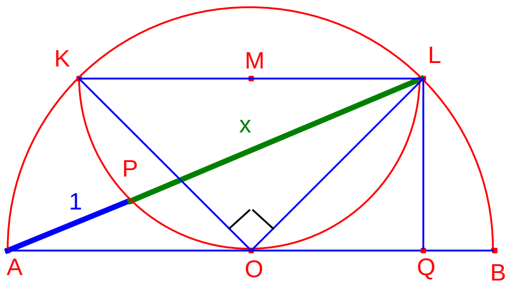
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{DN}} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$



4289.- La figura està formada per dues semicircumferències i una corda de la semicircumferència gran.
Determineu la mesura del segment x



Solució:



OA=R, MO=r

$R^2=2r^2$

Potència A respecte circum. gran

$1(1+x)=R^2$

$1+x=2r^2$

angleLAQ=45º/2

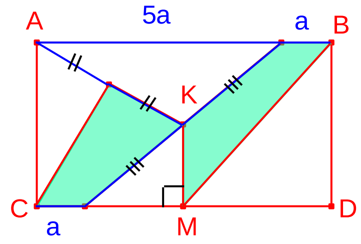
r/(1+x)=sin(45º/2)=sqrt(2-sqrt(2))/2

r^2=r/sqrt(2-sqrt(2))/2

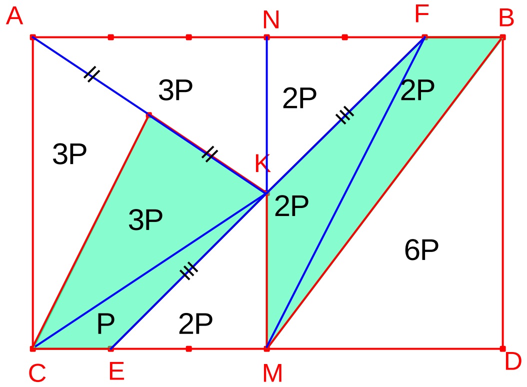
r=1/sqrt(2-sqrt(2))/2

x=1+sqrt(2)

4290.- En la figura M és el punt mig del costat $\overline{CD}$ del rectangle $CDBA$
$\overline{MK}$ és perpendicular al costat $\overline{CD}$
Determineu la proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle.



km
Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.



EMK, FNK iguals
K centre del rectangle

[Ombrejada]/[ABDC]=8P/(24P)=1/3