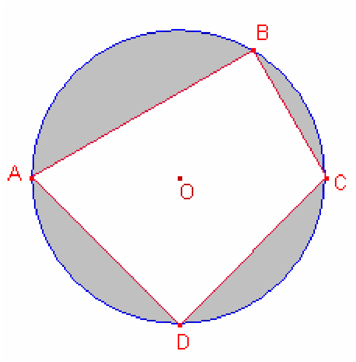
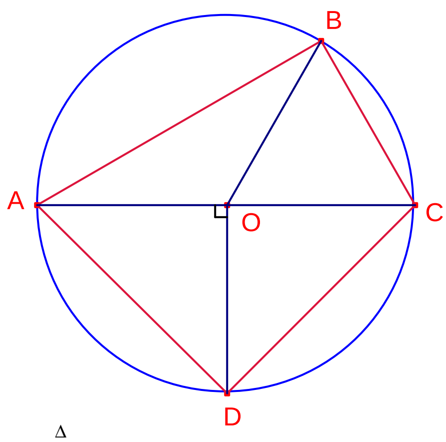
Problemes de Geometria per a l'ESO 43

421.- En una circumferència de centre O i radi 10, $\overline{AC}$ és un diàmetre, $\overline{OD}$ és perpendicular a $\overline{AC}$ i $\angle AOB = 120^o$.
Determineu l'àrea de la regió ombrejada.



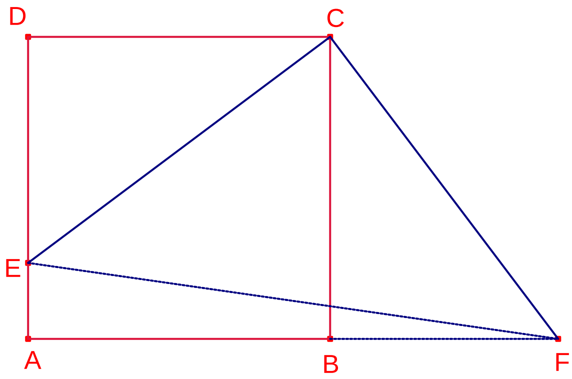


Solució:
Per ser $\overline{AC}$ un diàmetre, $\angle ABC = \angle ADC = 90^o$.
Si $\angle AOB = 120^o$, aleshores, $\angle BOC = 60^o$, $\overline{OB} = \overline{OC} = 10$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{OBC}$ és equilàter, $\overline{BC} = \overline{OB} = 10$, $\angle OCB = 60^o$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB} = 10\sqrt{3}$.

Per ser $\overline{OD}$ és perpendicular a $\overline{AC}$ $\overline{OD} = 10$ és altura del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.
L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea del cercle menys l'àrea dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{ACD}$.

$$S = \pi \cdot 10^2 - \left(\frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OD}}{2} \right) = 100\pi - \left(\frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} + \frac{20 \cdot 10}{2} \right) =$$
$$= 100\pi - 100 - 50\pi \approx 127.56.$$

422.- Siga ABCD un quadrat d'àrea 256.
Siga E del costat $\overline{AD}$ i F un punt de la prolongació del costat $\overline{AB}$ de manera que $\angle ECF = 90º$ i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ECF}$ és 200. Calculeu la longitud del segment $\overline{BF}$.



Solució:
Siga $x = \overline{BF}$.
El costat del quadrat ABCD és $\overline{AB} = \sqrt{256} = 16$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{CBF}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{DE} = x$. $\overline{CE} = \overline{CF}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$$\overline{CE}^2 = 16^2 + x^2$$

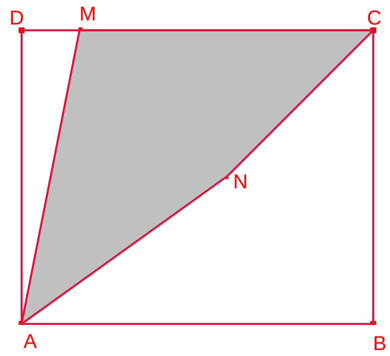
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ECF}$ és:

$$S_{ECF} = \frac{\overline{CE}^2}{2} = 200.$$

$$\frac{16^2 + x^2}{2} = 200.$$

Aleshores, $\overline{BF} = x = 12$.

423.- ABCD és un rectangle tal que $5\cdot\overline{AB}=6\cdot\overline{BC}$.
Siga M un punt del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{MC}=\overline{BC}$.
Siga N el punt mig del segment $\overline{MB}$.
Quina fracció de l'àrea rectangle ABCD representa l'àrea del quadrilàter AMCN?



Solució:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{6}{5}$. Siga $\overline{AB}=6x$, $\overline{BC}=5x$.

$S_{ABCD}=6x\cdot 5x=30x^2$.

Siga P la projecció de N sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga Q la projecció de N sobre el costat $\overline{BC}$.

Per ser N el punt mig de $\overline{MB}$:

$\overline{NP}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{5x}{2}$. $\overline{NQ}=\frac{1}{2}\overline{CM}=\frac{5x}{2}$.

$S_{AMCN}=S_{ABCD}-(S_{ABN}+S_{BCN}+S_{ADM})$.

$$S_{AMCN}=30x^2-\left(\frac{\overline{AB}\cdot\overline{NP}}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot\overline{NQ}}{2}+\frac{\overline{DM}\cdot\overline{AD}}{2}\right).$$

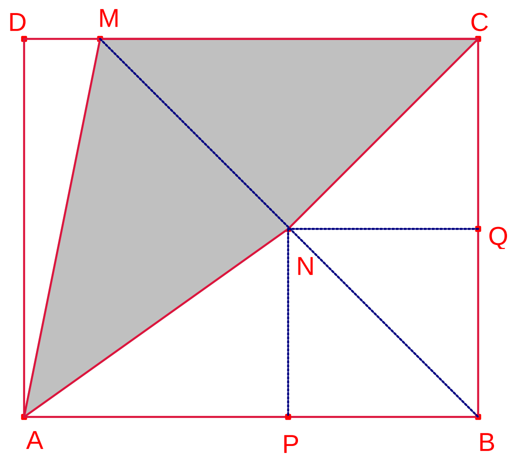
$$S_{AMCN}=30x^2-\left(\frac{6x\cdot\frac{5}{2}x}{2}+\frac{5x\cdot\frac{5}{2}x}{2}+\frac{x\cdot 5x}{2}\right).$$

$$S_{AMCN}=30x^2-\left(\frac{6x\cdot\frac{5}{2}x}{2}+\frac{5x\cdot\frac{5}{2}x}{2}+\frac{x\cdot 5x}{2}\right)$$

$S_{AMCN}=\frac{55}{4}x^2$.

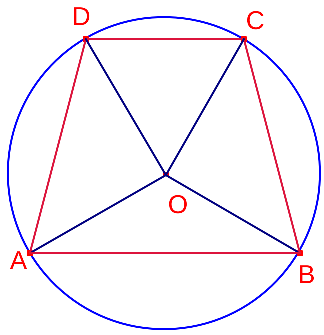
La proporció entre les àrees:

$$\frac{S_{AMCN}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{55}{4}x^2}{30x^2}=\frac{11}{24}.$$



424.- Un trapezi isòsceles ABCD està inscrit en una circumferència de centre O i radi 2.
Sabent que $\angle AOB = 120^{o}$ i $\angle COD = 60^{o}$, determineu l'àrea del trapezi.

Solució:
Un trapezi inscrit en una circumferència és isòsceles.
Aleshores, $\angle AOD = \angle BOC = 90^{o}$.



Per tant, els triangles $\overset{\Delta}{OAD}$, $\overset{\Delta}{OBC}$ són rectangles i isòsceles de catets el radi de la circumferència.

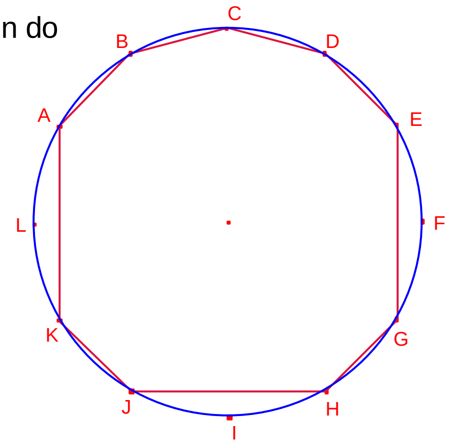
El triangle $\overset{\Delta}{OCD}$ és equilàter de costat el radi de la circumferència.

El triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABO}$ té la mateixa àrea que el triangle equilàter $\overset{\Delta}{OCD}$.

L'àrea del trapezi ABCD és igual al doble de l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAD}$ més el doble de l'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{OCD}$.

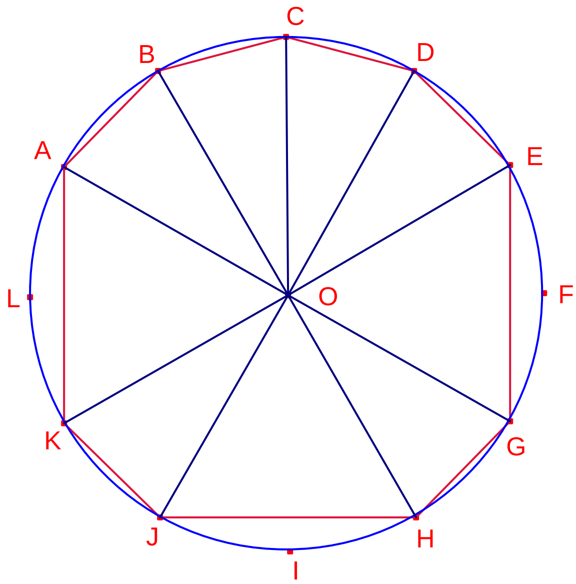
$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{OAD} + 2 \cdot S_{OCD} = 2\frac{\overline{OD}^2}{2} + 2\frac{\overline{OD}^2\sqrt{3}}{4} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7.46\,.$$

425.- A, B, C, D, E, F, G, H, I,J K, L, són els vèrtexs d'un do decàgon regular inscrit en una circumferència de radi r.
Determineu l'àrea del polígon ABCDEGHJK.

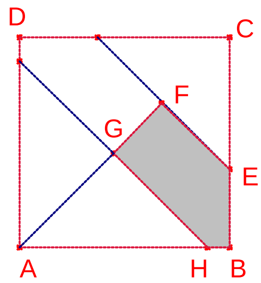


Solució:
L'angle central del dodecàgon regular mesura 30º.
Unint el centre O del dodecàgon amb els vèrtexs del polígon ABCDEGHJK, es formen 3 triangles equilàters de costat r i 6 triangles isòsceles de costats iguals r i angle 30º.
L'àrea del polígon ABCDEGHJK és:

$$S_{ABCDEGHJK}=3\cdot S_{OAK}+6\cdot S_{OAB}=3\cdot\frac{r^2\sqrt{3}}{4}+6\cdot\frac{r^2\cdot\sin 30^{\circ}}{2}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{2}\right)r^2$$



426.- El quadrat ABCD de costat c s'ha dividit en 5 parts d'igual àrea mitjançant talls paral·lels a les diagonals (veure figura). Calculeu el perímetre del pentàgon BEFGH.

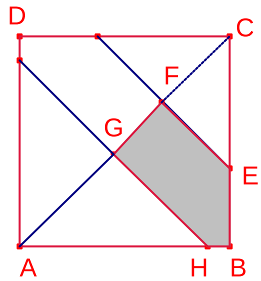


Solució:

$\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{CE}$, $\overline{FE} = \overline{FC}$.

El perímetre del pentàgon BEFGH és:

$p = \overline{GH} + \overline{HB} + \overline{BE} + \overline{FE} + \overline{GE} = \overline{AC} + \overline{HB} + \overline{BE}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = c\sqrt{2}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHG}$ és la cinquena part de l'àrea del quadrat ABCD:

$$\frac{\overline{AG}^2}{2} = \frac{1}{5}c^2 .$$

Aleshores, $\overline{AG} = \frac{\sqrt{10}}{5}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHG}$:

$$\overline{AH} = \overline{AG}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}c .$$

$$\overline{BE} = c - \overline{CE} = c - \overline{AG} = \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\right)c .$$

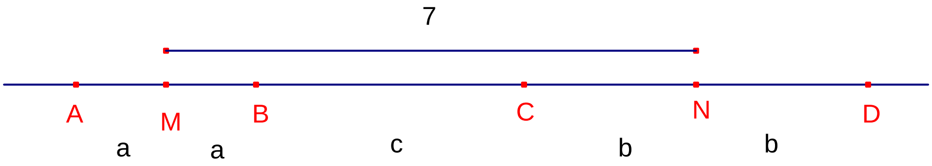
$$\overline{HB} = c - \overline{AH} = \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)c .$$

El perímetre del pentàgon BEFGH és:

$$p = \overline{AC} + \overline{HB} + \overline{BE} = \left(\sqrt{2} + 1 - \frac{\sqrt{10}}{5} + 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)c = \left(\frac{10 + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{10}}{5}\right)c .$$

427.- Sobre una recta es marquen els punts A, B, C, D en aquest ordre.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$ i N el punt mig del segment $\overline{CD}$.
Si $\overline{MN} = 7$, calculeu la longitud de la suma dels segments $\overline{AC} + \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{BC}$.

Solució:



Siga $\overline{AM} = \overline{BM} = a$, $\overline{CN} = \overline{DN} = b$, $\overline{BC} = c$.

$a + c + b = 7$.

$\overline{AC} = 2a + c$

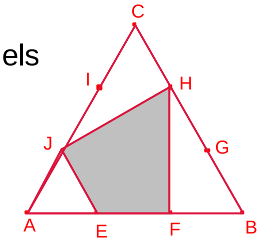
$\overline{AD} = 7 + a + b$

$\overline{BD} = 2b + c$

$\overline{BC} = c$.

$\overline{AC} + \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{BC} = 2a + c + 7 + a + b + 2b + c + c = 3(a + b + c) + 7 = 3 \cdot 7 + 7 = 28$.

428.- En el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ els punts E, F, G, H, I, J divideixen els costats en tres parts iguals.
Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter EFHJ i la del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:

Siga M el punt mig del segment $\overline{JG}$.

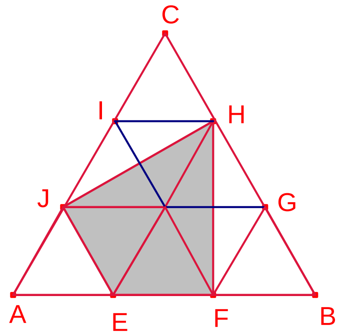
Els triangles $\overset{\Delta}{JMH}$, $\overset{\Delta}{FMH}$ són iguals.

Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{JMI}$, $\overset{\Delta}{JMH}$ són iguals.

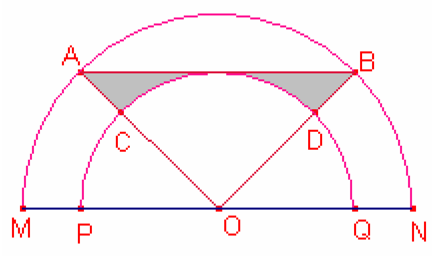
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a 9 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{JMI}$.

L'àrea del quadrilàter EFGJ és igual 4 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{JMI}$.
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{EFHJ}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9}.$$



429.- Els arcs $\overset{\frown}{MAN}$, $\overset{\frown}{PCQ}$ són semicercles de centre O.
El radi menor és 1 i el major $\sqrt{2}$.
$\angle AOM = \angle BON$ i $\angle AOB = 2 \cdot \angle AOM$.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada de la figura.

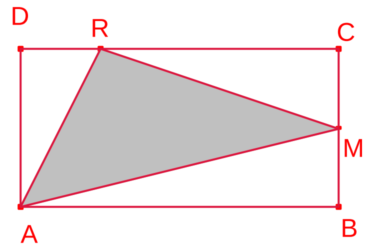


Solució:
$4 \cdot \angle AOM = 180°$.
Aleshores, $\angle AOM = 45°$, $\angle AOB = 90°$.
$\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{2}$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$ menys l'àrea del sector de radi 1 i d'angle 90º.

$$S = \frac{\overline{OA}^2}{2} - \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215.$$

430.- El rectangle ABCD té àrea 32cm^2.
M és el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Si $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$, i $\overline{DR} = \overline{BM}$.
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ARM}$.



Solució:
Siga $x = \overline{BM}$, aleshores, $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM} = 2x$, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC} = 4x$.
L'àrea del rectangle ABCD és 32cm^2, aleshores:
$4x \cdot 2x = 32$.
$x^2 = 4$.
$\overline{DR} = \overline{BM} = x$, aleshores, $\overline{CR} = \overline{CD} - \overline{DR} = 4x - x = 3x$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ARM}$ és igual a l'àrea del rectangle ABCD menys la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADR}$, $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{CRM}$:

$$\begin{aligned} S_{ARM} &= S_{ABCD} - (S_{ADR} + S_{ABM} + S_{CRM}) = \\ &= 32 - \left(\frac{x \cdot 2x}{2} + \frac{4x \cdot x}{2} + \frac{3x \cdot x}{2} \right) = \\ &= 32 - \frac{9}{2} x^2 = \\ &= 32 - \frac{9}{2} 4 = 14\text{cm}^2. \end{aligned}$$