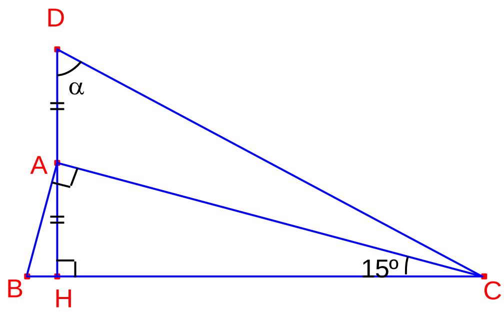
4291.- En la figura, $\overline{BC} = 6, \angle ACB = 15°$, $\overline{AH} = \overline{AD}$.
Calculeu $\sin\alpha$



Solució:
Siga $\overline{AH} = \overline{AD} = a, \overline{CH} = b, \overline{AC} = x, \overline{CD} = z$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHB}, \overset{\Delta}{CHA}$ són semblants.

$$\frac{x}{6} = \cos 15°$$

$$\frac{a}{x} = \sin 15°$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{6}$$

$$b = \frac{1}{6}x^2 = 6 \cdot \cos^2 15° = \frac{3}{2}\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

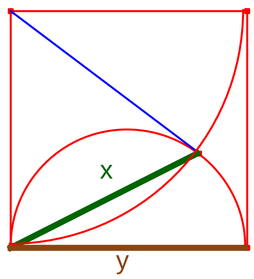
$$b^2 = \frac{9}{4}\left(7 + 4\sqrt{3}\right)$$

$$z^2 = \frac{9}{4}\left(11 + 4\sqrt{3}\right)$$

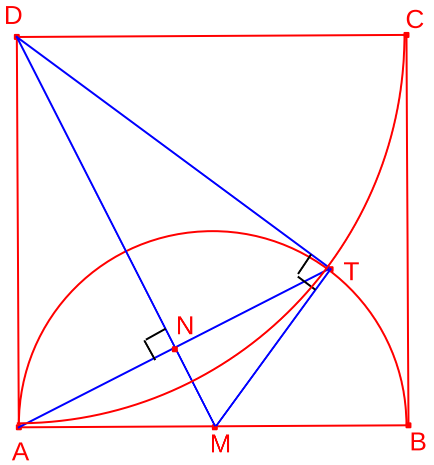
$$\frac{b^2}{z^2} = \frac{29 + 16\sqrt{3}}{73}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{29 + 16\sqrt{3}}{73}} \approx 0.8814124167$$

4292.- La figura està formada per un quadrat que conté una semicircumferència sobre un costat i un quadrant de centre un vèrtex.
Calculeu la proporció:
$\frac{x}{y}$



Solució



AD=y
AT=x
AM=y/2

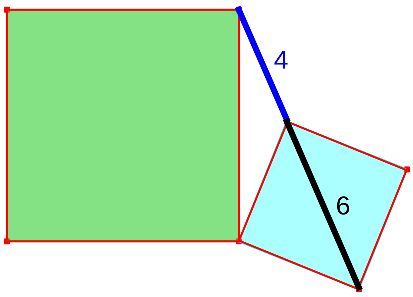
Els triangles DAM, DTM són iguals
DM=y·sqrt(5)/5

Els triangles TNM, DAM són semblants

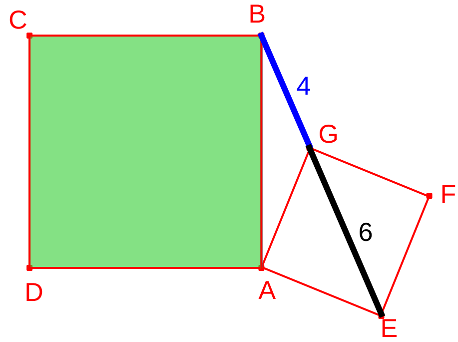
(x/2)/y=sqrt(5)/5

x/y=2·sqrt(5)/5

4293.- La figura està formada per dos quadrats que tenen un vèrtex comú.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea blava.

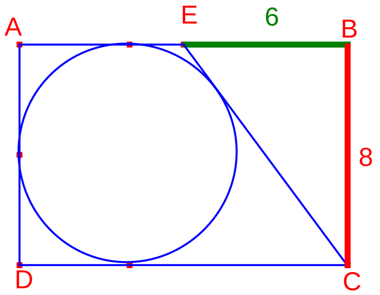


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $AEFG$ de diagonal $\overline{EG} = 6$
$\overline{AE} = 3\sqrt{2}$
$S_{AEFG} = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$

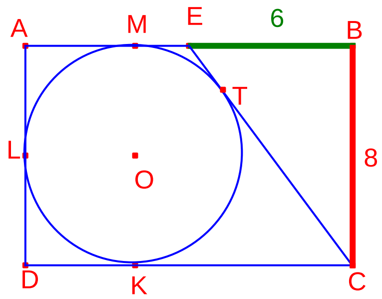


$\angle AEB = 45°$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AEB}$:
$c^2 = 100 + 18 - 2 \cdot 10 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_{ABCD} = c^2 = 58$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ABCD}}{S_{AEFG}} = \frac{58}{18} = \frac{29}{9}$

4294.- El rectangle $ABCD$ de la figura, conté una circumferència tangent a tres costats.
El segment $\overline{CE}$ és tangent a la circumferència.
$\overline{BC} = 8, \overline{BE} = 6$
Calculeu l'àrea del rectangle.

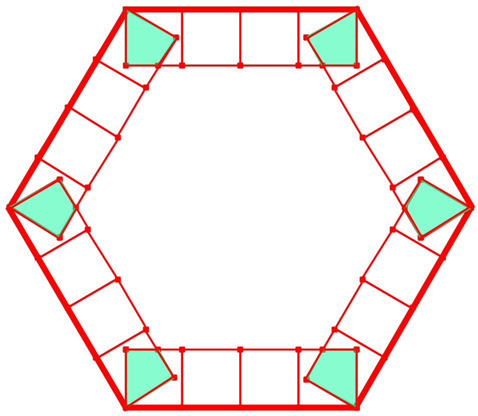


Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OL} = \overline{OK} = 4$
Siga T el punt de tangència del segment $\overline{CE}$ és tangent i la circumferència.
Siga $\overline{CT} = \overline{CK} = a$
$\overline{AM} = \overline{DK} = 4$

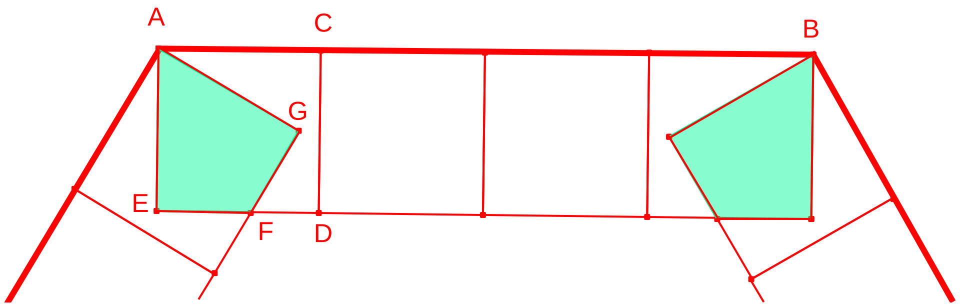


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CBE}$:
$\overline{CE} = 10$
$\overline{ET} = \overline{EM} = 10 - a$
$\overline{AB} = \overline{CD}, 4 + 10 - a + 6 = 4 + a$
Resolent l'equació:
$a = 8$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 12 \cdot 8 = 96$

4295.- La figura està formada per vint-i-quatre quadrats iguals sobre els costats d'un hexàgon regular.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon.

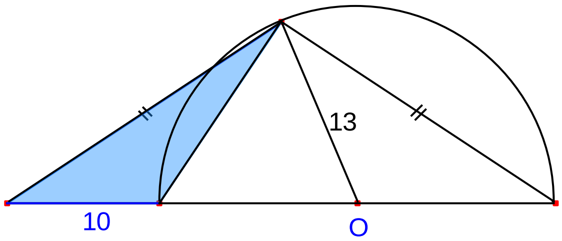


Solució:



Siga $\overline{AB} = 4a$ costat de l'hexàgon regular.
Siga el quadrat ACDE de costat $\overline{EC} = a$
$\angle CAG = 30°$
$\angle FAG = 30°$
$$\overline{AG} = a, \overline{GF} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = 6 \cdot \overline{AG} \cdot \overline{GF} = 2\sqrt{3} \cdot a^2$$
L'àrea de l'hexàgon regular és:ç
$$S_{hexàgon} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(4a)^2 = 24\sqrt{3} \cdot a^2$$
La proporció d'àrees és;
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{hexàgon}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot a^2}{24\sqrt{3} \cdot a^2} = \frac{1}{12}$$

4296.- La figura està formada per una semicircumferència de centre O i radi 13. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:

Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OB} = \overline{OC} = 13$

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 10$

Siga M la projecció de C sobre $\overline{AK}$

M és el punt mig del segment $\overline{AK} = 36$

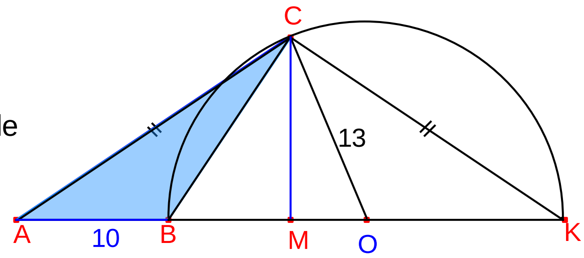
$\overline{OM} = 18 - 13 = 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMO}$:

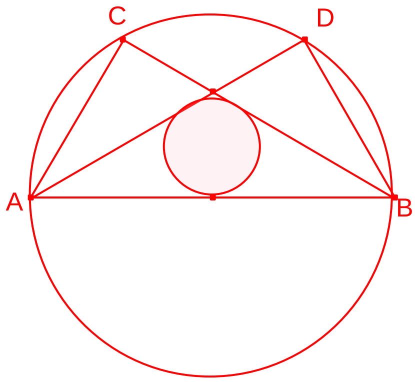
$\overline{CM} = 12$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

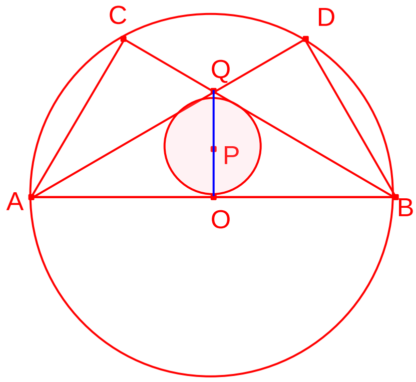
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$



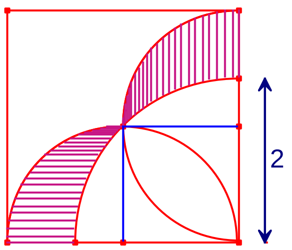
4227.- Siga la circumferència de diàmetre $\overline{AB} = 12$
Siga $\overline{AC} = \overline{BD} = 6$
Calculeu l'àrea del cercle ombrejat.



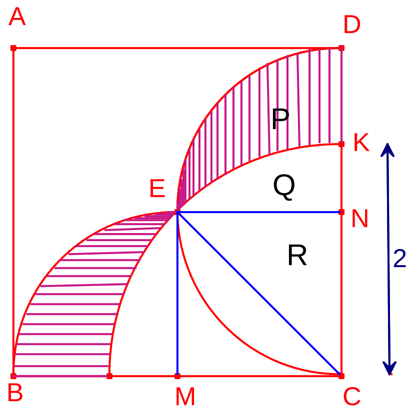
Solució:
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PO} = r$
$\angle ADB = 90°, \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$
Aleshores, $\angle DAB = 30°$
$\overline{OA} = 6, \overline{OQ} = 2\sqrt{3}, \overline{AQ} = 4\sqrt{3}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABQ}$ és:
$S_{ABQ} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{12 + 2 \cdot 4\sqrt{3}}{2} r$
Resolent l'equació:
$r = 6\left(2 - \sqrt{3}\right)$
L'àrea del cercle és:
$S_O = \pi \cdot 36\left(7 - 4\sqrt{3}\right) \approx 8.1200$



4298.- La figura està formada per un quadrat dos semicercles sobre dos costats i un quadrant de centre un vèrtex que passa pel centre del quadrat.
Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:

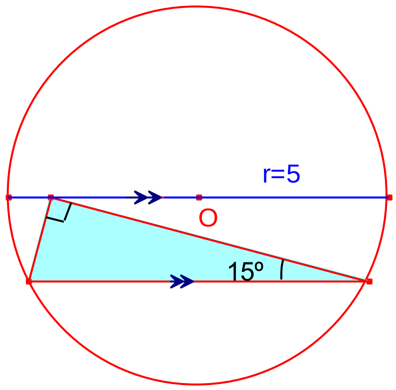


CK=2
NC=sqrt(2)

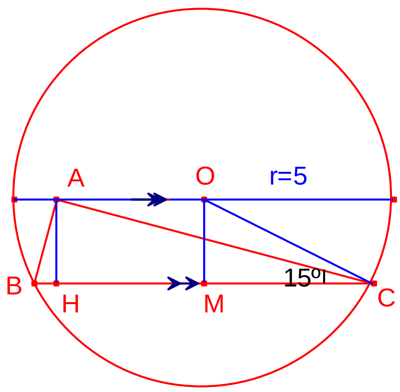
P+Q=Q+R
P=R

[ombrejada]=2P=2R=2

4299.- La figura està formada per una circumferència de radi 5 i una triangle rectangle que té la hipotenusa paral·lela al diàmetre dibuixat .
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



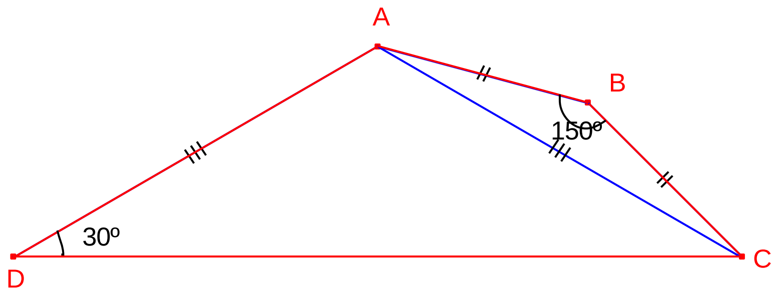
OM=AH=h
BC=a
HC=x, BH=a-x

$25=h^2+a^2/4$
$h^2=x(a-x)$
h/x=tan 15º=2-sqrt(3

h=sqrt(5), a=4·sqrt(5)

[ABC]=(ah)/2=10

4300.- En la figura el quadrilàter $ABCD, B = 150°, D = 30°$ té àrea $\sqrt{2}$.
$\overline{AB} = \overline{BC}, \overline{AC} = \overline{AD}$
Calculeu $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$



Solució:
El quadrilàter $ABCD$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = a, \overline{AC} = \overline{AD} = b, \overline{BD} = c$
$\angle DAC = 120°, \angle BAC = 15°$
$\angle DAB = 135°, \angle DCB = 45°$
$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = ac$
$\overline{BC} = b\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Tolomeu:
$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$
$ab + ab\sqrt{3} = ac$
L'àrea del quadrilàter $ABCD$ és $\sqrt{2}$.
$S_{DAB} + S_{ACB} = \sqrt{2}$
$$\frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}ab\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$
$ab + ab\sqrt{3} = 4$
$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = ac = ab + ab\sqrt{3} = 4$