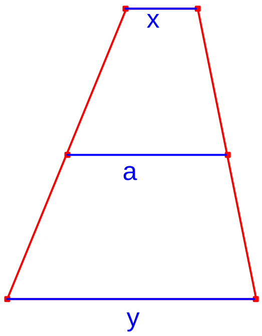
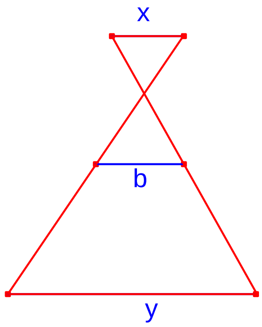
Problemes de Geometria per a l’ESO 432

4311.- Dues varetes de longitud x i y estan connectades per dues cordes amb un nus a mig camí. Les varetes es col·loquen paral·leles tant amb cordes no creuades com creuades. La distància entre els nusos es mesura com a i b respectivament. Expressa x i y en termes de a i b.





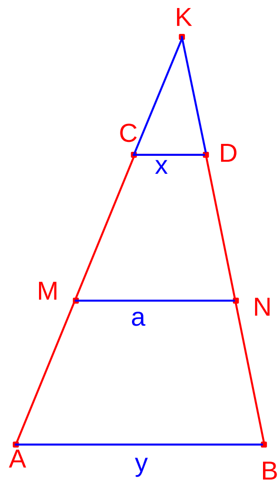
Solució:

Siga $\overline{AM}=\overline{CM}=m, \overline{CK}=k$

$\frac{x}{k}=\frac{a}{k+m}$

$\frac{y}{2m+k}=\frac{x}{k}=\frac{x+y}{2(m+k)}$

$x+y=2a$



Siga $\overline{AM}=\overline{DM}=m, \overline{MP}=n$

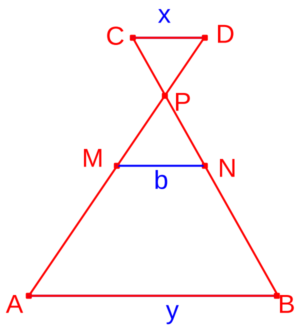
$\frac{b}{n}=\frac{y}{m+n}=\frac{y-b}{m}$

$\frac{b}{n}=\frac{x}{m-n}=\frac{b+x}{m}$

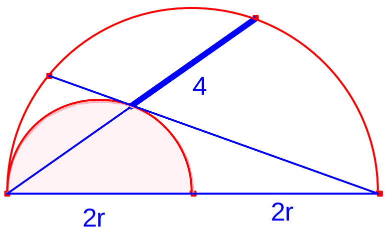
$y-x=2b$

Aleshores:

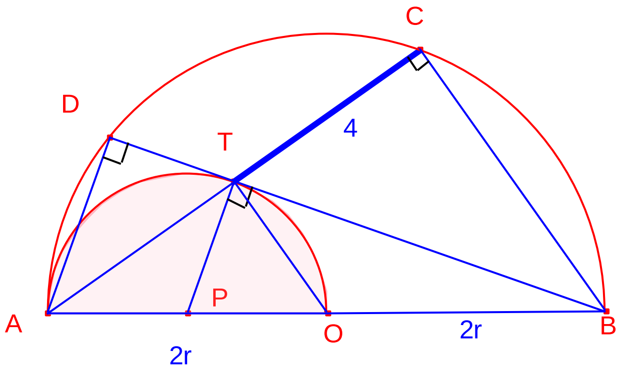
$x=a-b, y=a+b$



4312.- La figura està formada per dues semicircumferències tangents.
Calculeu el valor r



Solució:



AT=CT=4

teorema Pitàgores PTB
BT=2·sqrt(2)

DT=(1/3)BT=(2/3)sqrt(2)

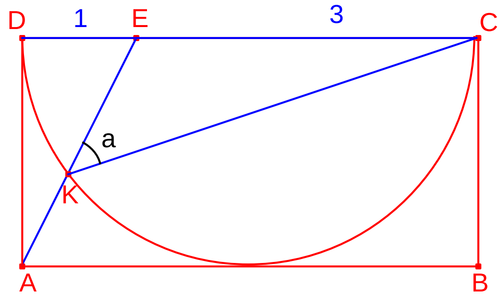
AD=(4/3)TP=(4/3)r

Teorema Pitàgores ADT

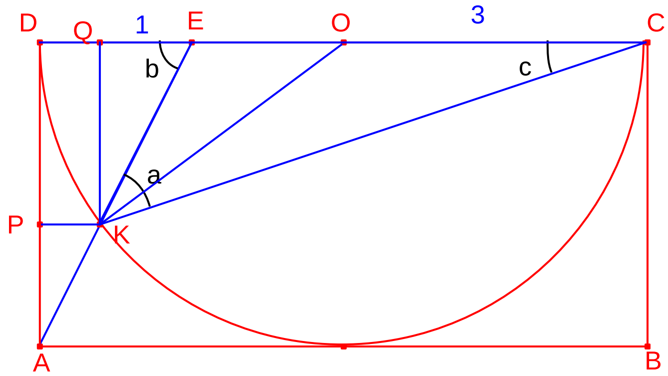
16=(16/9)r²+(8/9)r²

r=sqrt(6)

4313.- La figura està formada pel rectangle $ABCD$ i la circumferència inscrita en el rectangle de diàmetre $\overline{AB}$
Determineu la mesura de l'angle $a = \angle EKC$



Solució:



AD=2

tan b=2

PK=x, AP=2x

KQ=2-2x,

OQ=2-x

Teorema Pitàgores KQO

$4=(2-x)^2+(2-2x)^2$

x=2/5

QK=6/5, CP=18/5

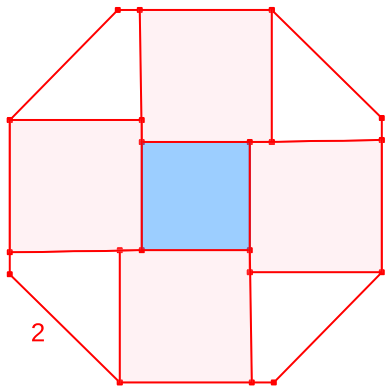
tan c=1/3

a=b-c

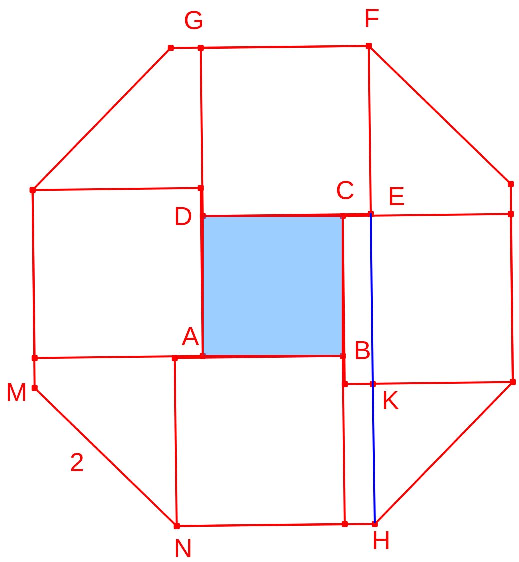
tan a=(2-1/3)/(1+2(1/3))=1

a=45º

4314.- En un octògon regular de costat 2 s'han dibuixat quatre quadrats iguals.
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:



MN=2
DE=c
AB=d

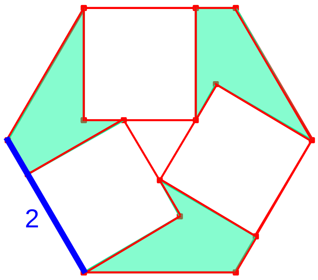
FH=2(1+sqrt(2))
2c+d=2(1+sqrt(2))

FK=2+sqrt(2)
2c=2+sqrt(2)

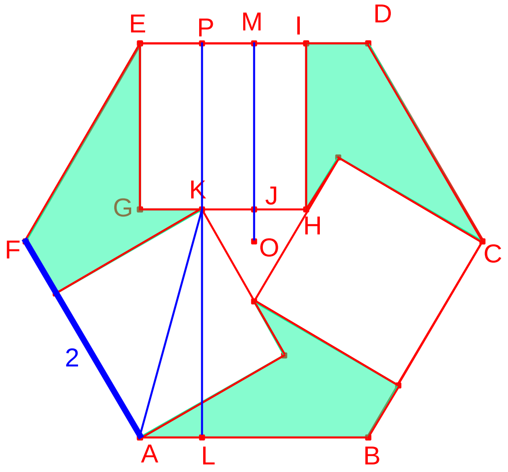
d=sqrt(2)

[ABCD]=d²=2

4315.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 2 i tres quadrats iguals. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$, de centre O.
Siga el quadrat $GHIE$ de costat $\overline{GH} = c$
Siga $\overline{KH} = d$
Siga M el punt mig del costat $\overline{DE}$
Siga J el punt mig del segment $\overline{KH}$



$$\overline{OM} = \sqrt{3}, \overline{OJ} = \frac{\sqrt{3}}{6}d$$

$$\overline{OM} = c + \frac{\sqrt{3}}{6}d = \sqrt{3}$$

Siga L la projecció de K sobre $\overline{AB}$
Siga P la projecció de K sobre $\overline{De}$
$\overline{AK} = c\sqrt{2}, \angle KAL = 75°$
$\overline{LP} = 2\sqrt{3}$

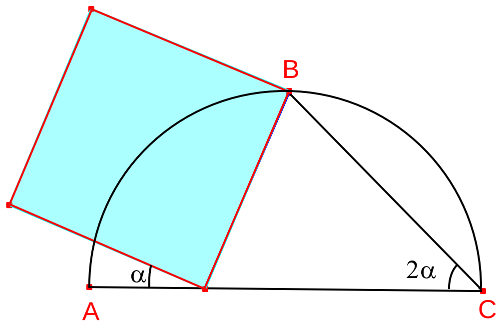
$$\overline{LH} = c\sqrt{2} \cdot \sin 75° = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

$$c + \frac{1+\sqrt{3}}{2}c = 2\sqrt{3}$$

Resolent l'equació:
$c = 2(-1+\sqrt{3}), d = 2(-3+2\sqrt{3})$
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea de l'hexàgon regular menys la suma de les àrees de tres quadrats de costat c i d'un triangle equilàter de costat c

$$S_{ombrejada} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}2^4 - \left(3 \cdot \left(2\left(-1+\sqrt{3}\right)\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\left(-3+2\sqrt{3}\right)\right)^2\right) = 3\left(-4+3\sqrt{3}\right) \approx$$
$$\approx 3.5885$$

4316.- La figura està formada per un semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 2r$ i un quadrat.
$\overline{AB} = \overline{CB}$
Calculeu l'àrea del quadrat en funció del radi r.



Solució:
Siga el quadrat $BDEF$ de costat $\overline{FB} = c$
Si $\overline{AB} = \overline{CB}$, aleshores, $2a = 45°$

$\angle BFC = \frac{135°}{2}$

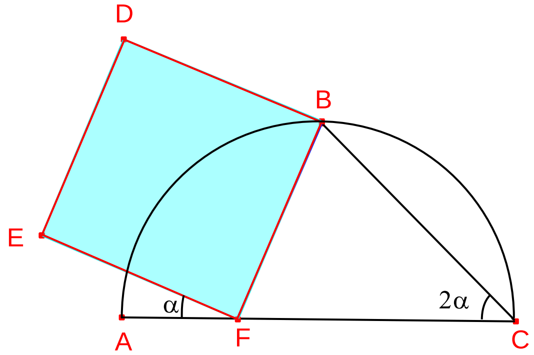
Aplicant el teorema del sinus al triangle $\overset{\Delta}{BFC}$:

$$\frac{r\sqrt{2}}{\sin\frac{135°}{2}} = \frac{c}{\sin 45°}$$

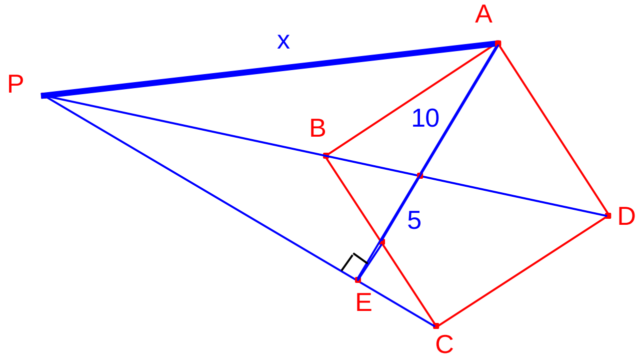
$$c = \frac{1}{\sin\frac{135°}{2}} = \sqrt{\frac{4}{2-\sqrt{2}}}r$$

L'àrea del quadrat $BDEF$ és:

$S_{BDEF} = c^2 = 2\left(2+\sqrt{2}\right)r^2$

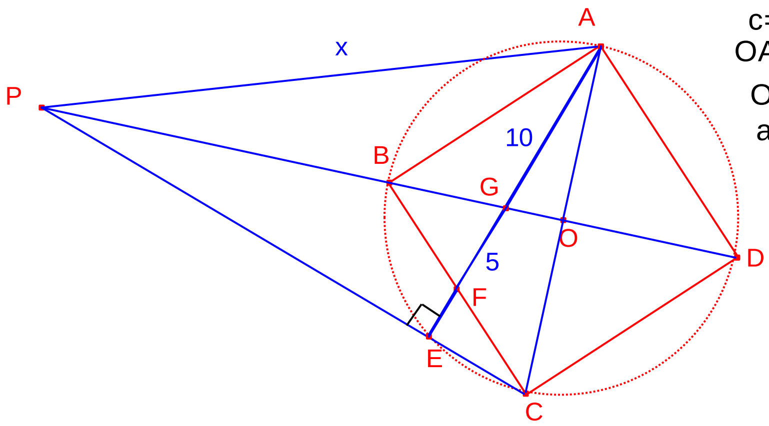


4317.- En la figura calculeu la mesura del segment $x = \overline{AP}$



Solució:

AP=PC=x
ABECD inscriptible
AB=c
angleBAE=b
cos b=c/15
angleGAO=45º-b
cos(45º-b)=c·sqrt(2)/20=sqrt(2)/2(c/15+sqrt(225-c²)/15



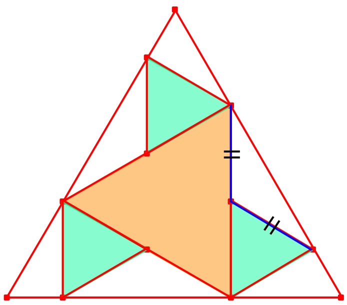
c=6·sqrt(5)
OA=CO=3·sqrt(10)
OG=sqrt(10)
angleCPD=45º-b

AOG, POA semblantsD

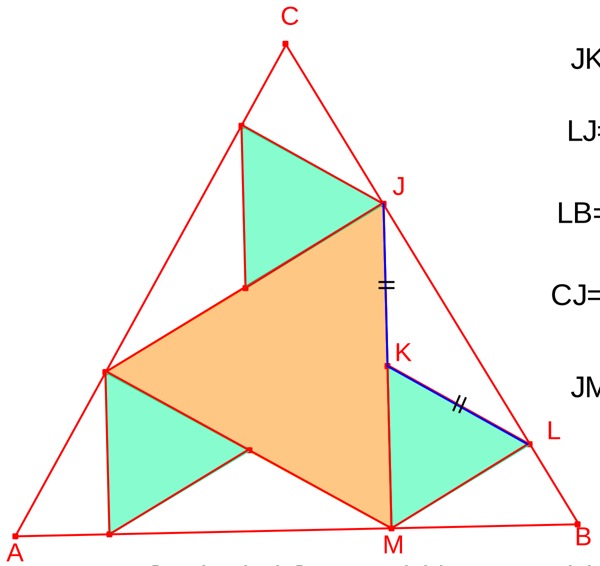
Teorema de Tales:
x/10=3·sqrt(10)/sqrt(10)

x=30

4318.- La figura està formada per quatre triangles equilàters (tres iguals) en l'interior d'un cinquè triangle equilàter.
Calculeu la proporció entre l'àrea total ombrejada i l'àrea del triangle exterior.



Solució:



JK=KL=a

LJ=a·sqrt(3)

LB=a·sqrt(3)/3

CJ=a·2·sqrt(3)/3

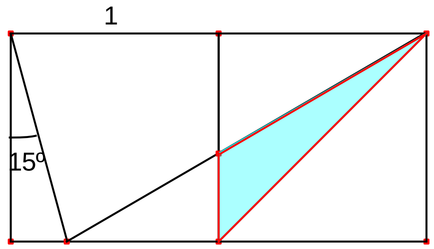
JM=2a, BC=a·2·sqrt(3)

[ombrejada]=3·sqrt(3)/4·a^2+sqrt(3)/4·$(2a)^2$=(7/4)·sqrt(3)a^2

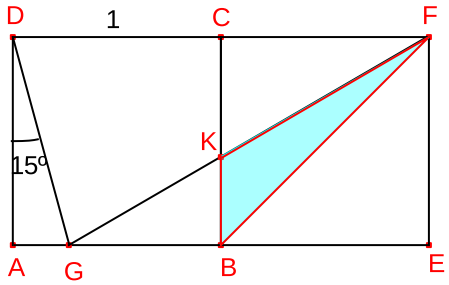
[ABC]=sqrt(3)/4·$(2\cdot sqrt(3)a)^2$=3·sqrt(3)·a^2

[ombrejada]/[ABC]=7/12

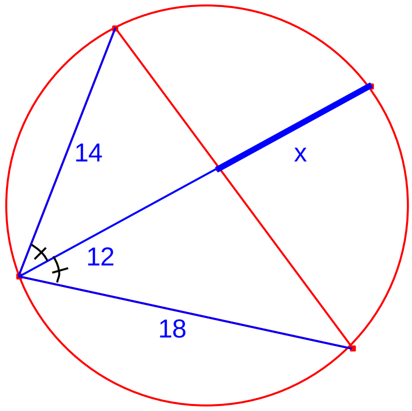
4319.- La figura està format per dos quadrats adossats de costat 1.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



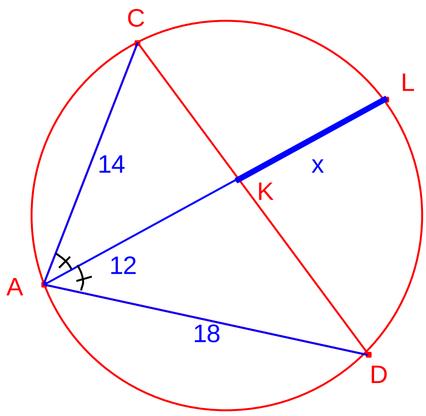
Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, BEFC$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga $\overline{AG} = x$
$x = \tan 15° = 2 - \sqrt{3}$
$\overline{GB} = -1 + \sqrt{3}$
$\overline{GE} = \sqrt{3}$
Els triangles rectangles $G\overset{\Delta}{B}K, G\overset{\Delta}{E}F$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{BK}}{1} = \frac{\overline{GB}}{\overline{GE}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{BKF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$



4320.- La figura està formada per una circumferència i quatre cordes.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:



KL=x

CK=14k, DK=18k

12x=14k·18k

$x=21k^2$

angleCAK=angleKAD

teorema cosinus AKC, AKD

$(196+144-196k^2)/336 = (144+324-324k^2)/432$

$k^2=3/7$

x=9