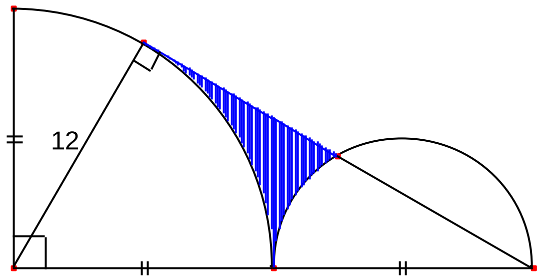
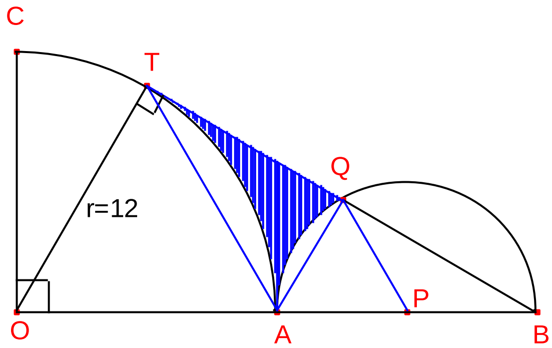
4321.- La figura està formada per un quadrant i una semicircumferència.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

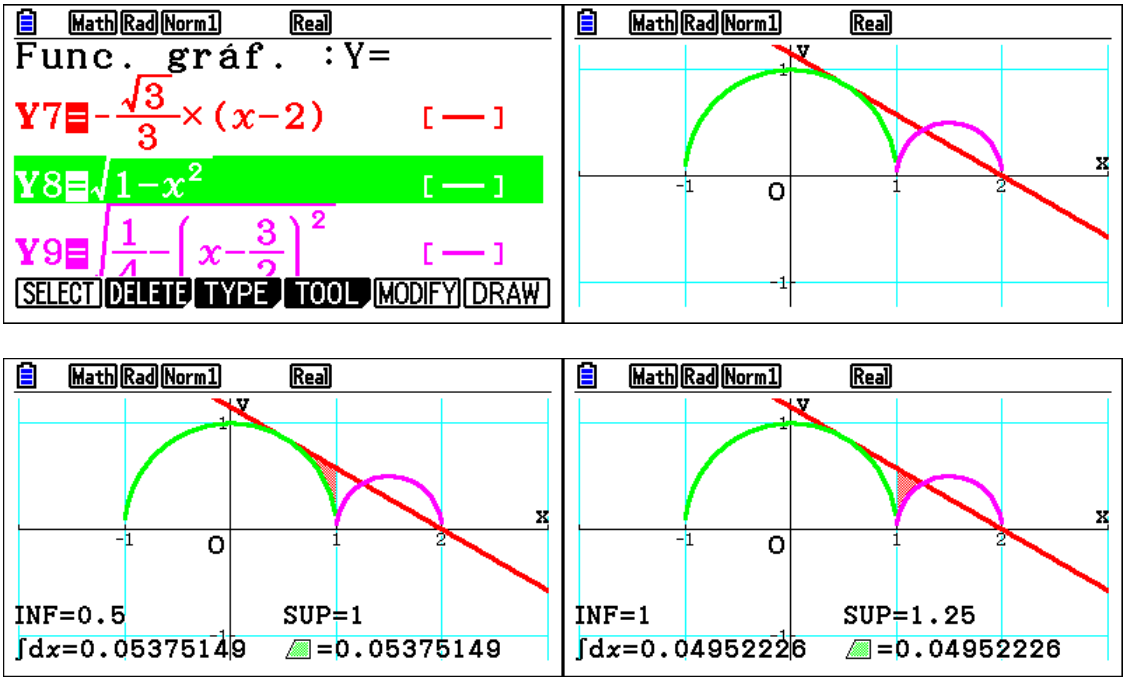


Solució:
$\overline{OT} = r = 12, \overline{OB} = 2r$
$\angle OBT = 30°$
$\angle TOA = \angle OAT = 60°, \angle APQ = QAP = \angle OBT = 60°$



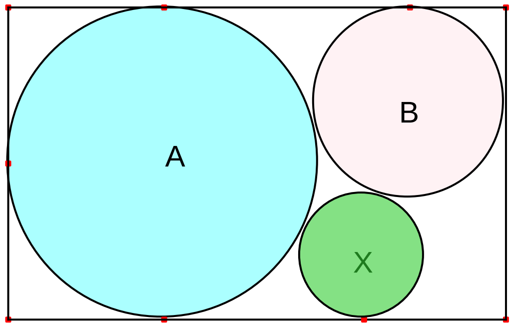
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{TQA}$ menys la suma de dos segments circulars (un de 60º i radi r, l'altre de 60º i radi $\frac{1}{2}r$)

$$S_{ombrejada} = \frac{\sqrt{3}}{8}r^2 - \left(\frac{\pi}{6}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot r^2 + \left(\frac{\pi}{6}\frac{1}{4}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}r^2\right)\right) = \left(\frac{7\sqrt{3}}{16} - \frac{5\pi}{24}\right)r^2$$

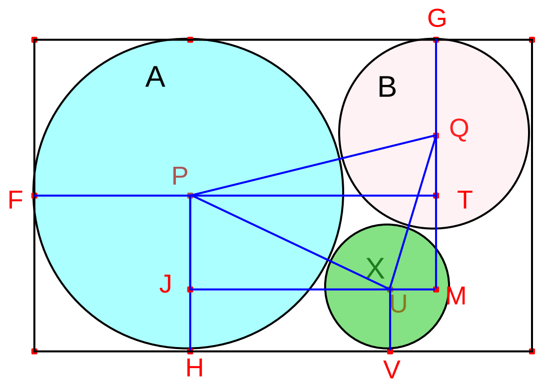


Àrea ombrejada és:
$S = (0.05375149 + 0.04952226)r^2 = 0.10327375 \cdot 144 \approx 14.8714$

4322.- Dins d'un rectangle hi ha tres cercles tangents d'àrees A, B, X
Determineu l'àrea X en funció de A, B

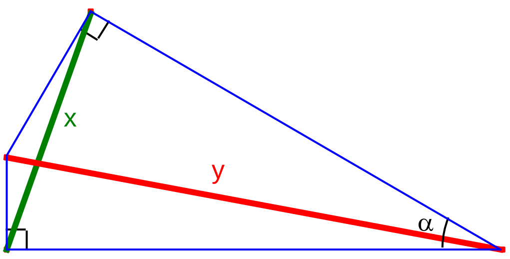


Solució:



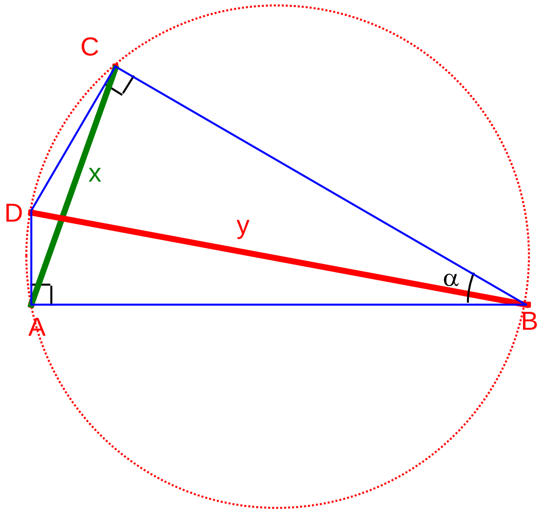
PF=a, QG=b, UV=x
PQ=a+b, QT=a-b
PT=2·sqrt(ab)
PU=a+x, PJ=a-x
JU=2·sqrt(ax)
QU=b+x, QM=2a-b-x
UM=2sqrt(a(b+x)-a²)
PT=JU+UM
x=a²/(4b)
X=A²/(16B)

4323.- En la figura els segments x, y compleixen $4x^3 - 3xy^2 + y^3 = 0$
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:
Siga el quadrilàter $ABCD, A = C = 90°, \overline{AC} = x, \overline{BD} = y$
El quadrilàter és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
$\overline{BD} = y$ és el diàmetre de la circumferència circumscrita.
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = y$$

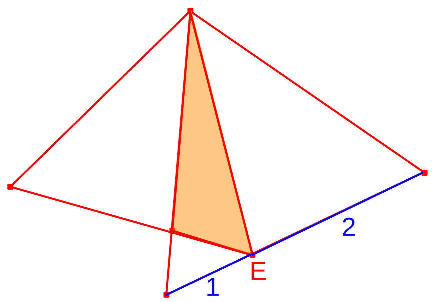


$4x^3 - 3xy^2 + y^3 = 0$
Factoritzant l'equació:
$(y - 2x)(y - 2)(y + x) = 0$
Resolent l'equació:
$y = 2x$

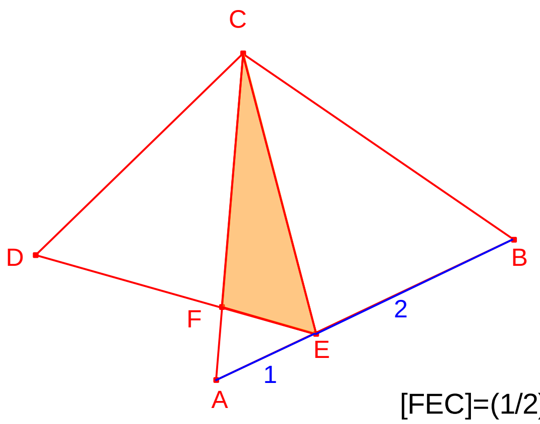
$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$\alpha = 30°$

4324.- Dos triangles equilàter comparteixen un vèrtex.
Calculeu l'àrea comuna als dos triangles.



Solució:



CE=c

Teorema cosinus BCE

$c^2=9+4-6=7$

Els triangles AFE, BEC semblants

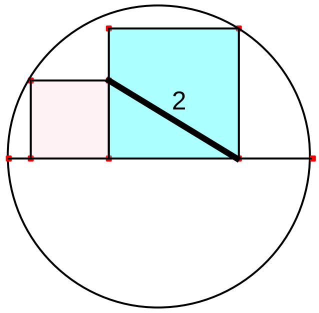
Aplicant teorema Tales:

EF/sqrt(7)=1/3

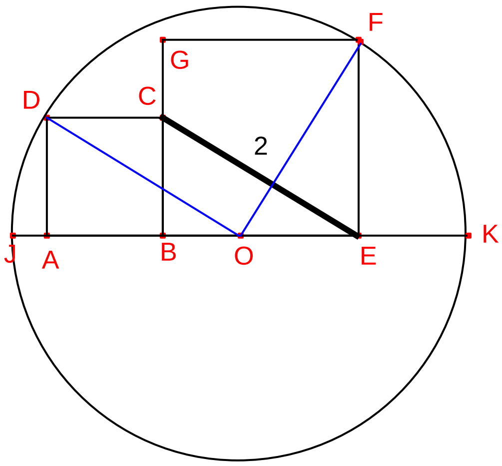
EF=sqrt(7)/3

[FEC]=(1/2)·sqrt(7)·sqrt(7)/3·sin(60º)=(7/12)sqrt(3)

4325.- Sobre el diàmetre d'una circumferència s'han dibuixat dos quadrats.
Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:



$AB=a$, $BE=b$

$OJ=OK=OD=OF=R$

Teorema Pitàgores CBE

$a^2+b^2=4$

$OB=x$

Teorema Pitàgores DAO, OEF

$R^2=a^2+(a+x)^2$

$R^2=b^2+(b-x)^2$

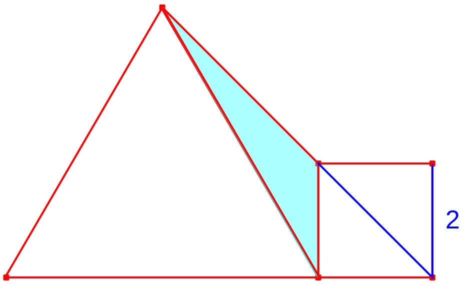
$0=2b^2-2a^2-2x(a+b)$

$b-a=x$

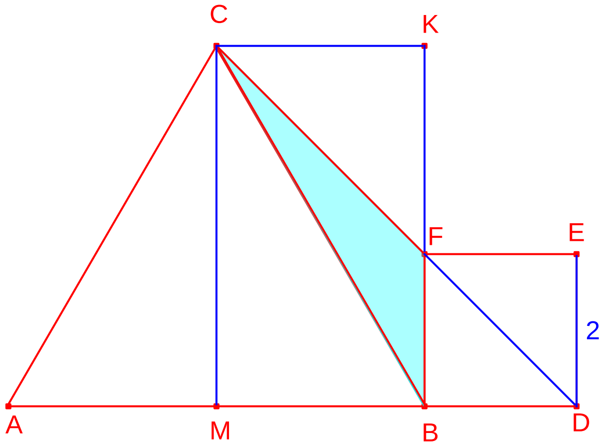
$R^2=a^2+b^2=4$

$R=2$

4326.- La figura està formada per un quadrat de costat 2 i un triangle equilàter. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



AB=c

CK=c/2

CF=c·sqrt(2)/2

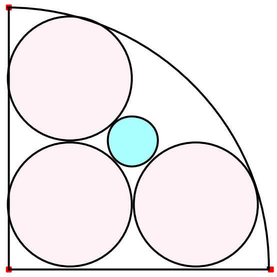
CM=c·sqrt(3)/2

DM=2+c/2

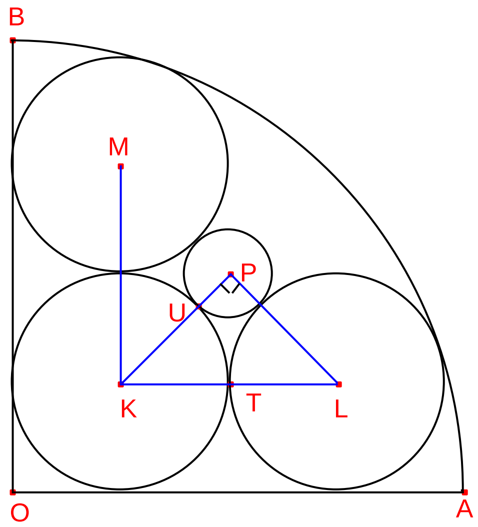
c=2(1+sqrt(3))

[BFC]=(1/2)·(c/2)·2=1+sqrt(3)

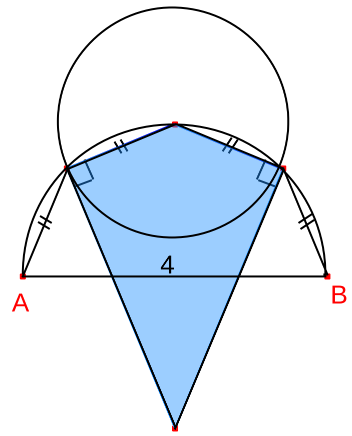
4327.- La figura està formada per un quadrant que conté quatre circumferències tangents, tres d'elles iguals. Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea blava.



Solució:
Siguen les tres circumferències iguals de centre K, L, M i radi $\overline{KT} = r$
$\angle MKL = 90°$
Siga La circumferència de centre P radi $\overline{PR} = s$
$\angle MKP = \angle LKP = 45°$
$\overline{PK} = \overline{PL} = r + s$
Aleshores, $\angle KPL = 90°$
$\overline{KL} = 2r$
Aleshores:
$2r = \sqrt{2}(r + s)$
$r = \left(1 + \sqrt{2}\right)s$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{rosa}}{S_{blava}} = 3\frac{r^2}{s^2} = 3\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

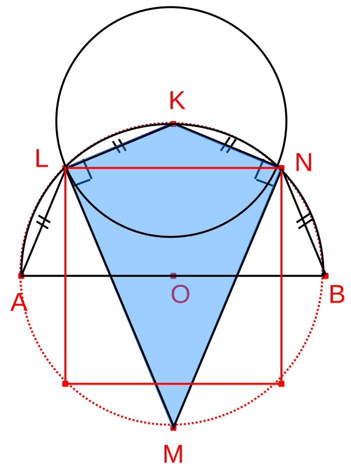


4328.- La figura està formada per una semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 4$, que s'ha dividit en quatre cordes iguals, un cercle i un quadrilàter.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

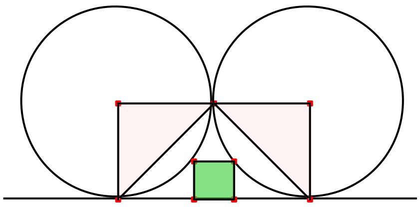


Solució:
Siga O el centre de la semicircumferència.
$\angle LON = 90°$
$\angle LKN = 135°$

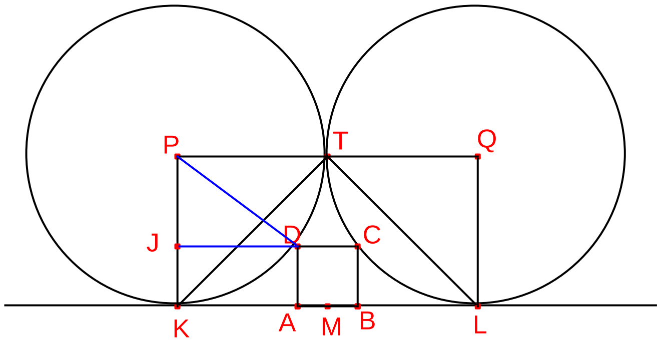
El quadrilàter $KLMN$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
$KLMN$ és un cometa.
La circumferència circumscrita al quadrilàter és la que conté la semicircumferència
$\overline{LN} = 2\sqrt{2}$
$\overline{KM} = 4$
L'àrea del quadrilàter KLMN és:
$S_{KLMN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{LN} \cdot \overline{KM} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 = 4\sqrt{2}$



4329.- La figura està formada per dues circumferències iguals tangents i les dues tangents a una recta, i un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea rosa.

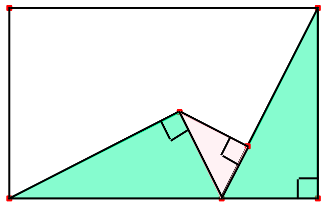


Solució:
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = \overline{PT} = r$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QL} = \overline{QT} = r$
Siga M el punt mig del segment $\overline{KL}$
siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2a$
Siga J la projecció de D sobre $\overline{PK}$

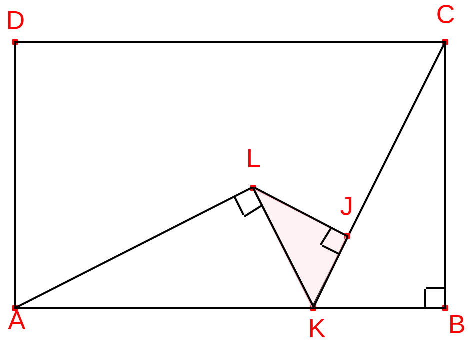


$\overline{PJ} = r - 2a, \overline{PD} = r, \overline{JD} = r - a$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PJD}$:
$r^2 = (r - 2a)^2 + (r - a)^2$
Simplificant:
$5a^2 - 6ra + r^2 = 0$
Resolent l'equació:
$a = \frac{1}{5}r$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{verda}}{S_{rosa}} = \frac{(2a)^2}{r^2} = 4\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

4330.- La figura està formada per un rectangle auri, i tres triangles rectangles.
Els triangles verds són iguals i tenen àrea 25.
Calculeu l'àrea del triangle rosa.



Solució:
Siga el rectangle auri $ABCD$, $\overline{AB} : \overline{AD} = \Phi : 1$
Siguen els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ALK}, \overset{\Delta}{KBC}, \overline{AL} = \overline{BC} = a, \overline{LK} = b$ d'àrea 25.



$ab = 50$
$\overline{AK} = \sqrt{a^2 + b^2}$
Siga $\alpha = \angle AKL$
$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
$\sin 2\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$
$\sqrt{a^2+b^2} + b = \Phi\text{a}$

$a^2 = (1+\Phi)a^2 - 2\Phi ab$
$a^2 = (1+\Phi)a^2 - 100\Phi$
$a = 10, b = 5$
$\angle JKL = 180° - 2\alpha$
$\sin 2\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5}$
$\overline{LJ} = 4, \overline{KJ} = 3$
$S_{KJL} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$