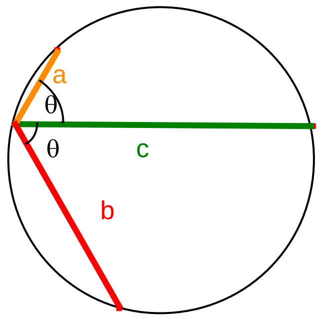
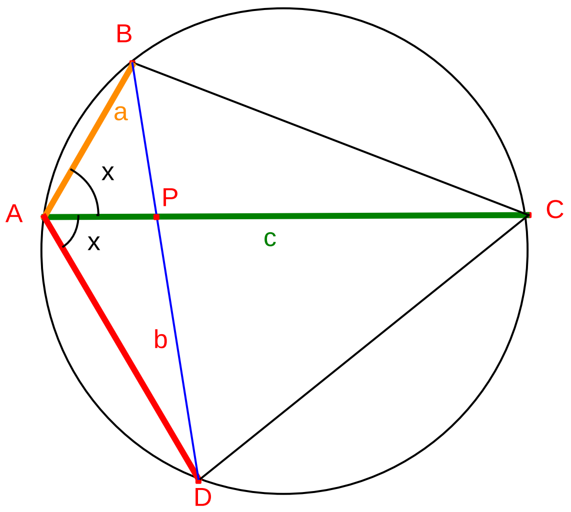
4331.- La figura està formada per una circumferència i tres cors tals que $c = a + b$ i formen un angle igual Calculeu la mesura de l'angle θ



Solució:



c=a+b

Teorema Bisectriu

BP=ka, DP=kb

BC=CD=d

Teorema Tolomeu

ad+bd=k(a+b)c

d=kc

Teorema cosinus ABC, ADC

$k^2c^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos x$

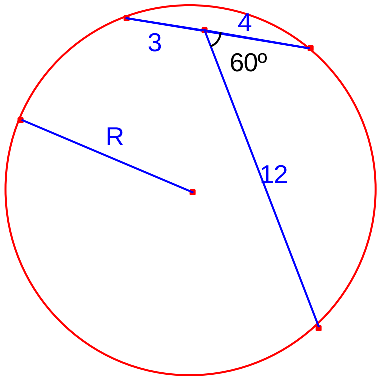
$k^2c^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos x$

$0=(b^2-a^2)-2c(b-a)\cos x$

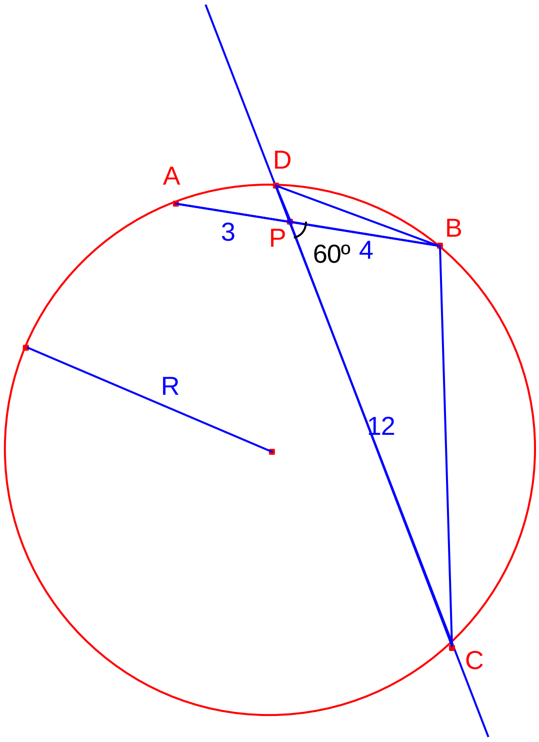
cos x=1/2

x=60º

4332.- Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:



DP=x, BC=y, BD=z

Potencia P respecte circumferència

3·4=12·x

x=1

Teorema cosinus PBC, DPB

y²=144+12-2·12·4·(1/2)

z²=16+1-2·4·1·(1/2)

y=4·sqrt(7), z=sqrt(21

angleDCB=a

Teorema cosinus DBC

21=112+169-2·4sqrt(7)·13·cos a

cos a=(5/14)sqrt(7)

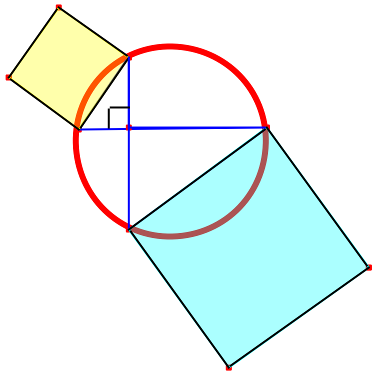
sin a=sqrt(21)/14

Teorema sinus DBC

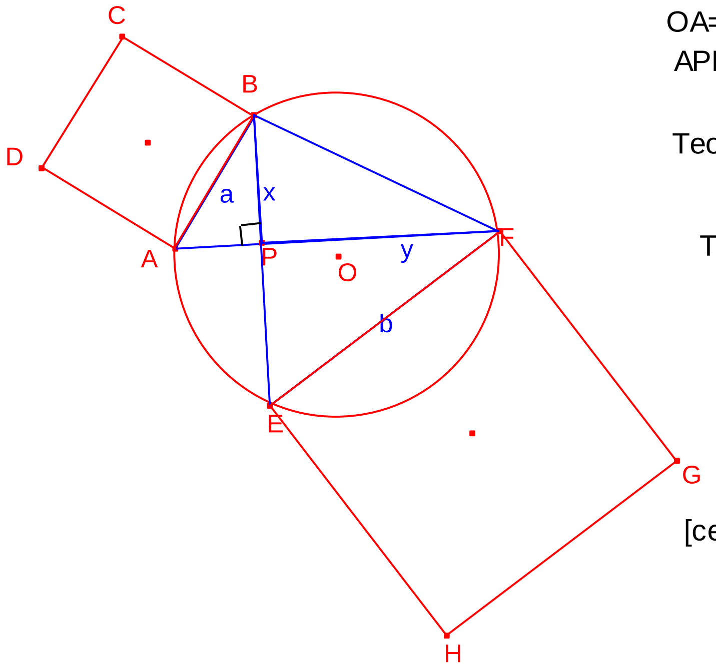
sqrt(21)/(sqrt(21)/14)=2R

R=7

4333.- La figura està formada per un cercle amb dues cordes perpendiculars i dos quadrats. Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle i la suma de les àrees dels quadrats.



Solució:



OA=R

APB, EPF semblants

Teorema de Tales:

$y/x=b/a$

Teorema dels sinus ABF

$a/(x/\mathrm{sqrt}(x^2+y^2))= 2R$

$a\cdot\mathrm{sqrt}(1+(y/x)^2)=2R$

$a\cdot\mathrm{sqrt}(1+(b/a)^2)=2R$

$a^2+b^2=4R$

[cercle]/([ABCD]+[EFGH])=PI/4

4334.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle rectangle $C = 90°$

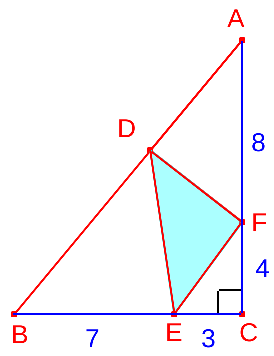
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADF}$ és 16

$\overline{BE} = 7, \overline{CE} = 3, \overline{CF} = 4, \overline{AF} = 8$

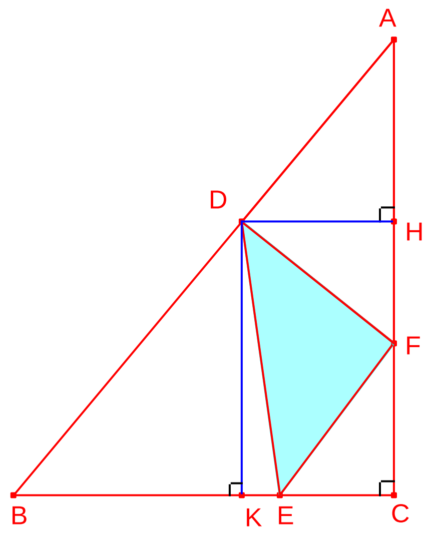
Calculeu:

a) La proporció $\overline{AD} : \overline{BD}$

b) La proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{ABC}$



Solució:



AF=8, CF=4, CE=3, BE=7

[ADF]=16, DH=4

[ECF]=6

AB=2·sqrt(61)

DHA, BCA semblants

AD/(2·sqrt(61))=4/10

AD=(4/5)sqrt(61), BD=(6/5)sqrt(61)

AD : BD = 2/3

AH=24/5

DK/AH=3/2

DK=36/5

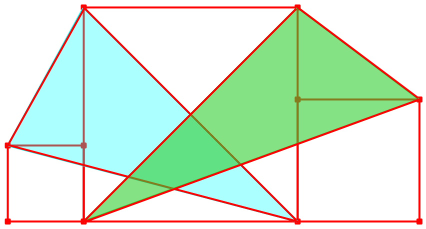
[BED]=(1/2)·7·(36/5)=126/5

[ABC]=60

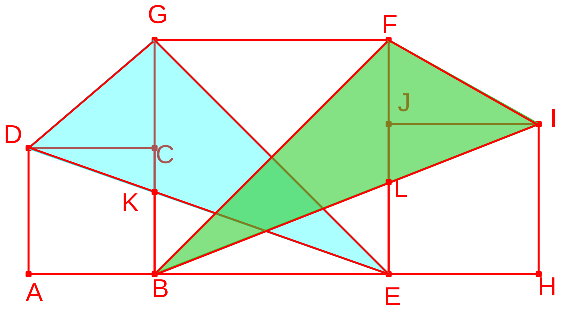
[DEF]=[ABC]-([ADF]+[ECF]+[BED])=64/5

[DEF]/[ABC]=16/75

4335.- La figura està formada per tres quadrats. Calculeu la proporció entre les àrees dels triangles blau i verd.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
Siga el quadrat $EHIJ$ de costat $\overline{EH} = c$



Siga $\overline{EK} = x, \overline{BK} = a - x$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCK}, \overset{\Delta}{EBK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{b} = \frac{a}{a+b}$$

$$x = \frac{a^2}{a+b}$$

Siga $\overline{JL} = y, \overline{EL} = c - y$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IJL}, \overset{\Delta}{BEL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{y}{c} = \frac{c-y}{b} = \frac{c}{c+b}$$

$$y = \frac{c^2}{c+b}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEG}$ és:

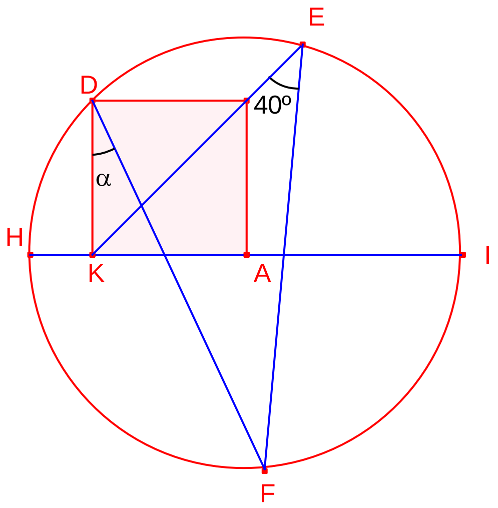
$$S_{DEG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GK} \cdot \overline{AE} = \frac{1}{2}(b - a + x)(a + b) = \frac{1}{2}b^2$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BFI}$ és:

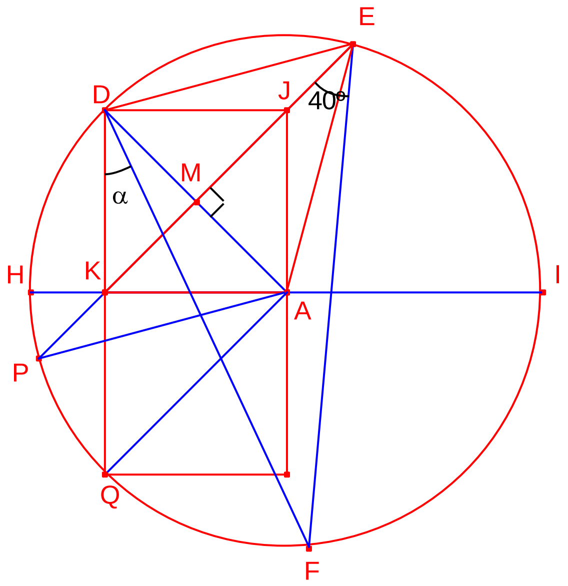
$$S_{BFI} = \frac{1}{2} \cdot \overline{LF} \cdot \overline{BH} = \frac{1}{2}(b - c + y)(c + b) = \frac{1}{2}b^2$$

Les àrees són iguals.

4336.- Donada la circumferència de centre A i un quadrat que té un vèrtex en el centre A
Si $\angle KEF = 40°$, calculeu la mesura de l'angle $\angle KDF = \alpha$



Solució:



angleKEF=40º
anglePAF=80º
Els triangles KDE, KAE són iguals

AE=DE
angleDAE=60º
angleJAE=15º
angleKEA=angleDEK=30º

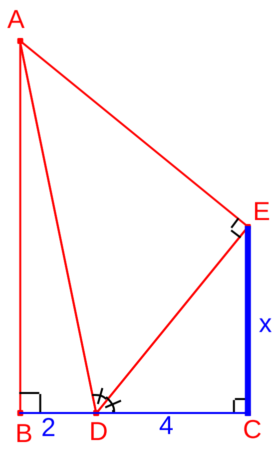
anglePAE=120º
angleHAP=15º

anglePAQ=45º-15º=30º
angleQDF=(80º-30º)/2=25º

Generalització:
Donada la circumferència de centre A i un quadrat que té un vèrtex en el centre A
Si $\angle KEF = \beta$, calculeu la mesura de l'angle $\angle KDF = \alpha$
Solució:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} - 15°$$

4337.- La figura està formada per tres triangles rectangles.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:
El quadrilàter $ABDE$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
El diàmetre de la circumferència circumscrita és $\overline{AD}$

$\overline{DE} = \sqrt{16 + x^2}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCE}, \overset{\Delta}{DEA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{AD} = \dfrac{16 + x^2}{4}$

$\overline{BE} = \sqrt{36 + x^2}$

Siga $\alpha = \angle CDE = \angle EDA$

$\sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{16 + x^2}}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BDE}$:

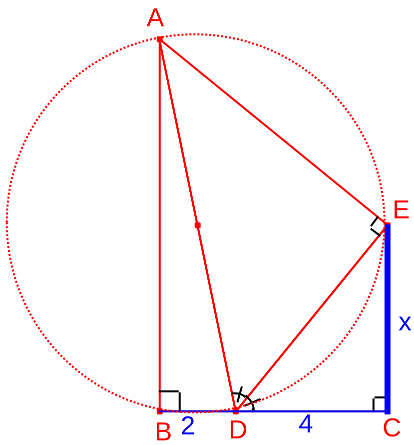
$\dfrac{\overline{BE}}{\sin\alpha} = \overline{AD}$

$\dfrac{\sqrt{36 + x^2}}{\dfrac{x}{\sqrt{16 + x^2}}} = \dfrac{16 + x^2}{4}$

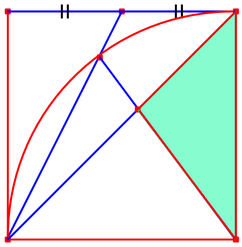
Elevant al quadrat i simplificant:

$x^4 = 576$

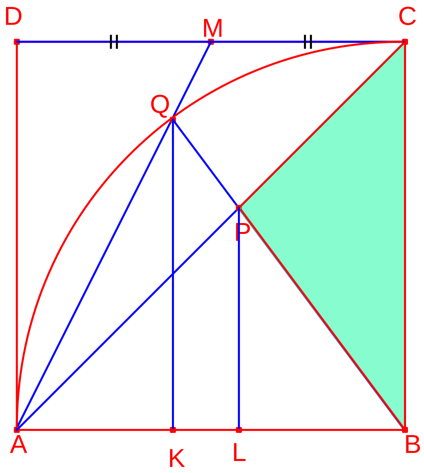
$x = \sqrt[4]{576}$



4338.- La figura està formada per un quadrat i un quadrant.
Calculeu la proporció entre l’àrea del triangle ombrejat i l’àrea del quadrat.



Solució:



$AB=1$

$AK=x$, $QK=2x$, $BK=1-x$

Teorema Pitàgores QKB

$x=2/5$

$BK=3/5$, $QK=4/5$

$BL=y$, $AL=PL=1-y$

Els triangles QKB, PLB són semblants

Aplicant el Teorema de Tales

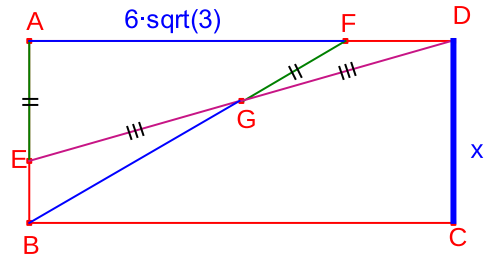
$(1-y)/y=4/3$

$y=3/7$

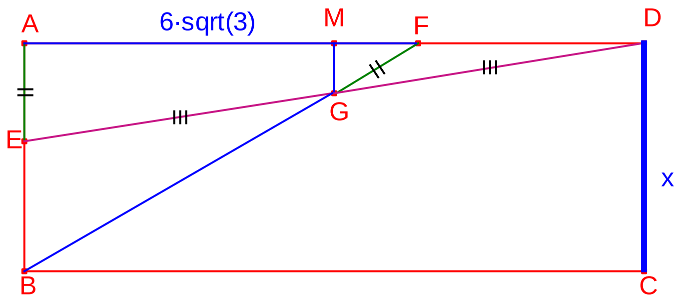
$[BCP]=(1/2)BC\cdot y=3/14$

$[BCP]/[ABCD]=3/14$

4339.- En el rectangle $ABCD$ de la figura, calculeu la mesura del costat $x = \overline{CD}$

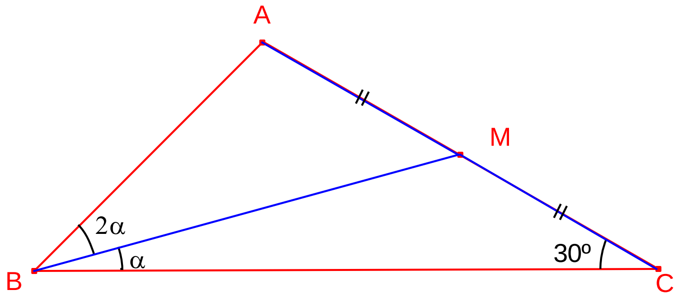


Solució:



AF=6·sqrt(3)
M projecció de G sobre AD
M punt mig AG
AE=FG=a
GM=a/2
angleGFM=30º
x=AB=AF·sqrt(3)/3=6

4340.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 30°$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}$ tal que
$\alpha = \angle CBM, 2\alpha = \angle ABM$
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCM}$:
$$\frac{b}{2\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(30° + \alpha)}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$:
$$\frac{b}{2\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin(30° + \alpha)}$$
Dividint les dues expressions:
$$\frac{2\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a}{c} = \frac{\sin(30° + 3\alpha}{\sin 30°}$$
$$\cos\alpha = \sin(30° + 3\alpha)$$
$$\alpha = 90° - (30° + 3\alpha)$$
$$\alpha = 15°$$