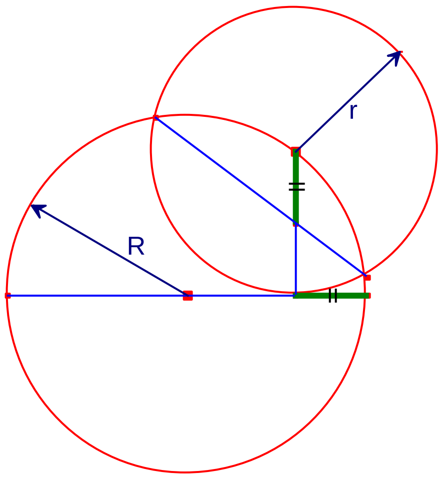
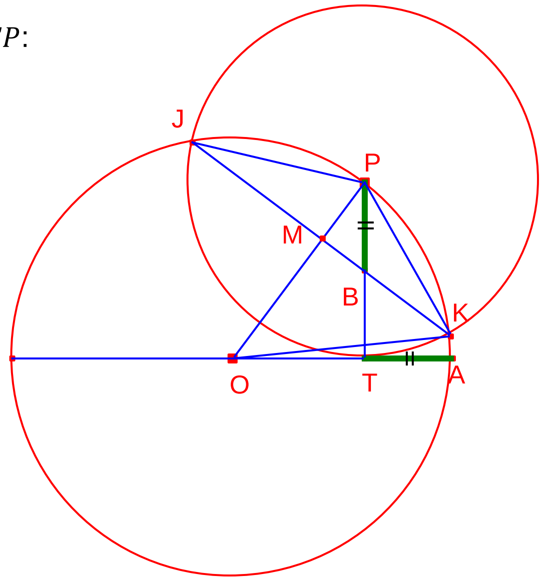
4351.- La figura està formada per dues circumferències de radi R, r.
Calculeu la proporció:
$\frac{r}{R}$



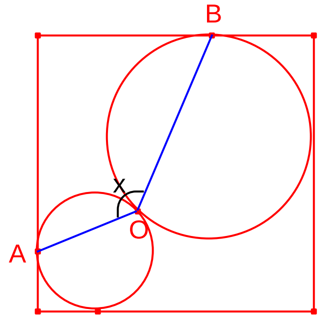
Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PJ} = r$
Siga $\overline{AT} = \overline{BP} = a$



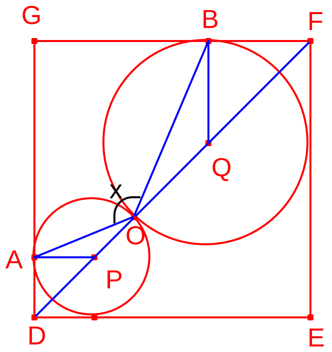
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$R^2 = r^2 + (R-a)^2$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OTP}, \overset{\Delta}{BMP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{PM} = \frac{ar}{R}$
$\overline{OM} = R - \overline{PM} = R - \frac{ar}{R}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMK}$:
$\overline{MK}^2 = R^2 - \left(R - \frac{ar}{R}\right)^2 = 2ar - \left(\frac{ar}{R}\right)^2$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMK}$:
$r^2 = \left(\frac{ar}{R}\right)^2 + 2ar - \left(\frac{ar}{R}\right)^2$
Simplificant:
$r = 2a$

$R^2 = r^2 + \left(R - \frac{r}{2}\right)^2$
$\frac{r}{R} = \frac{4}{5}$

4352.- La figura està formada per un quadrat i dues circumferències tangents i cadascuna tangent a dos costats.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleAPO=45º

angleBFQ=45º

anglePAO=angleAOP=45º/2

angleQBO=angleBOQ=45º/2

x=angleAOB=180º-(45º/2+45º/2)=135º

4353.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'acompleix:

$$\frac{2\cdot cosA}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{2\cdot\cos C}{c}=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}$$

Calculeu la mesura de l'angle A

Solució:

$$\frac{2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a}+\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b}+\frac{2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}$$

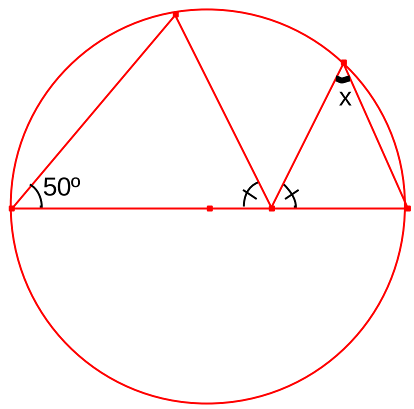
$$\frac{a^2+3b^2+c^2}{2abc}=\frac{2a^2+2b^2}{2abc}$$

$$a^2=b^2+c^2$$

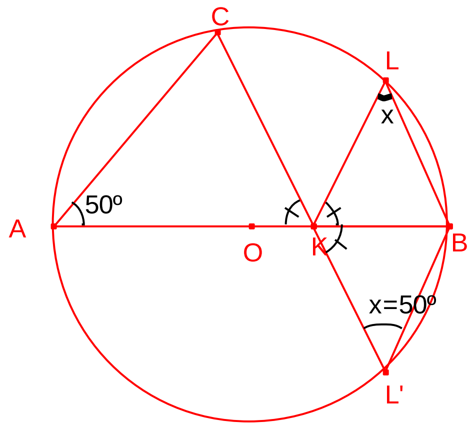
Aplicant el teorema invers de Pitàgores:

$$A=90°$$

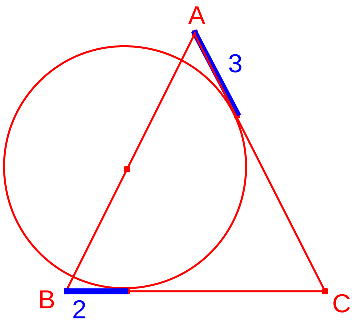
4354.- La figura està formada per una circumferència i dos triangles.
Calculeu la mesura de l'angle x



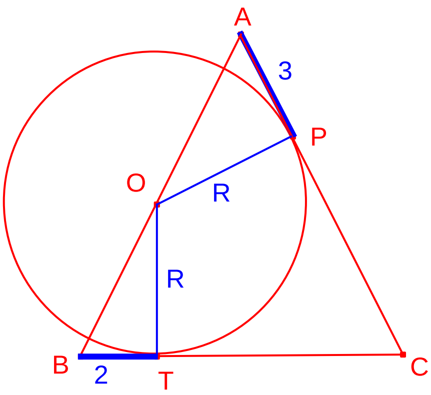
Solució:
Siga L' el punt simètric de L respecte del diàmetre $\overline{AB}$
$\angle KL'B = x, \angle L'KB = \angle AKC$
$\angle KL'B = \angle CAB = 50°$



4355.- La figura està formada per un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = \overline{AC}$ i una circumferència de radi R, amb centre en un costat i tangent als altres dos costats.
Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:

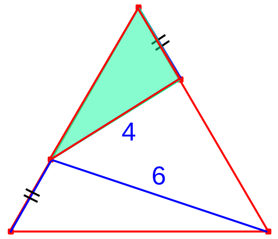


angleBOT=x
anglePAO=2x
tan x=2/R

$\tan(2x)=R/3=(4/R)/(1-4/R^2)$

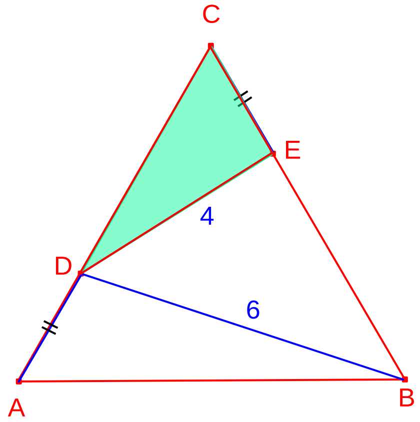
R=4

4356.- Sobre els costats d'un triangle equilàter s'han dibuixat dos segments iguals.
Els dos segments interiors al triangle equilàter mesuren 6 i 4.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.

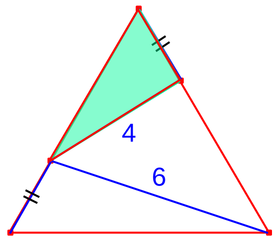


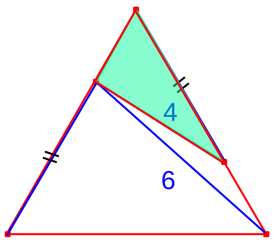
Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $\overline{AD} = \overline{CE} = x$
L'àrea del triangle ombrejat és:
$$S_{CDE} = \frac{1}{2}x \cdot (c - x)\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2 + xc)$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$
$36 = x^2 + c^2 - xc$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DEC}$
$16 = x^2 + (c - x)^2 - x(c - x) = 3x^2 + c^2 - 3xc$
Restant ambdues expressions:
$10 = -x^2 + xc$
L'àrea del triangle ombrejat és:
$$S_{CDE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

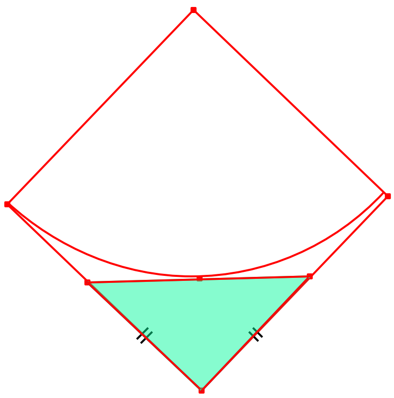


Si resolem el sistema:
$x = 13 \pm \sqrt{69}$
Gràficament el problema té dues solucions

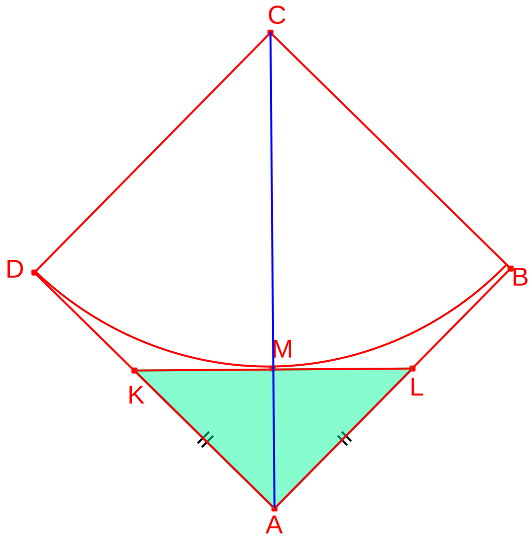




4357.- La figura està formada per un quadrat i un quadrant.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=a

AC=sqrt(2)

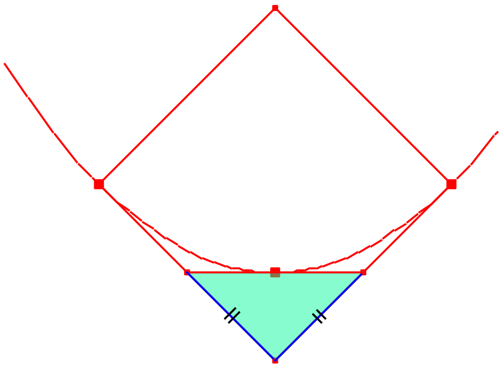
MA=sqrt(2)-1

AL=2-sqrt(2)

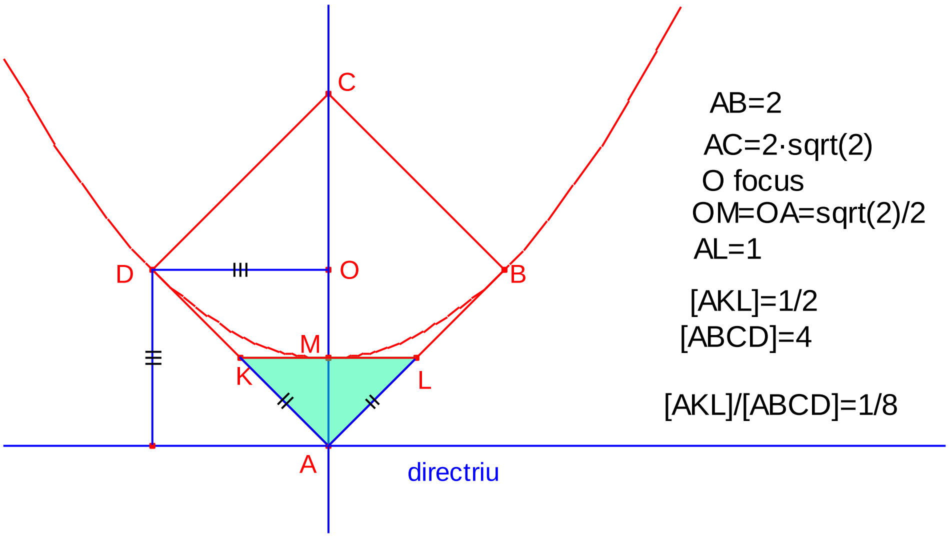
[AKL]=(1/2)AL²=3-2·sqrt(2)

[AKL]/[ABCD]=3-2·sqrt(2)

4358.- Una paràbola és tangent a dos costats d'un quadrat i a la hipotenusa d'un triangle isòsceles. Es mostren els tres punts de tangència. Quina fracció del quadrat és verda?



Solució:



AB=2

AC=2·sqrt(2)

O focus

OM=OA=sqrt(2)/2

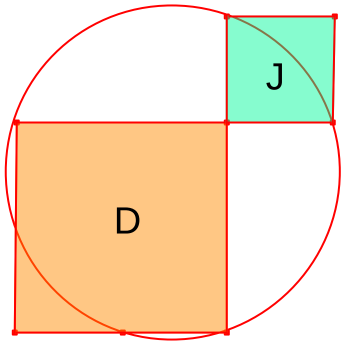
AL=1

[AKL]=1/2

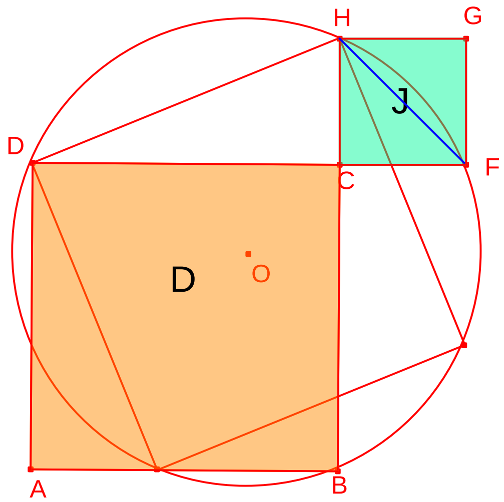
[ABCD]=4

[AKL]/[ABCD]=1/8

4359.- La figura està formada per dos quadrats amb un vèrtex comú d'àrees D i J, que tenen quatre vèrtexs en una circumferència.



Solució:



OD=R

AB=a, CF=b

angleDBH=45º

DH=R·sqrt(2)

angleDFH=45º

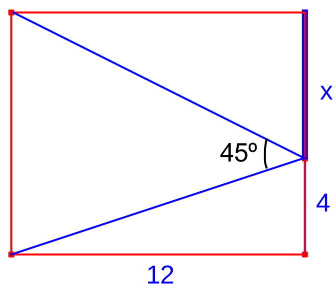
Teorema cosinus al triangle DFH

$2R^2=(a+b)^2+2b^2-2(a+b)\cdot b\cdot sqrt(2)\cdot sqrt(2)/2$

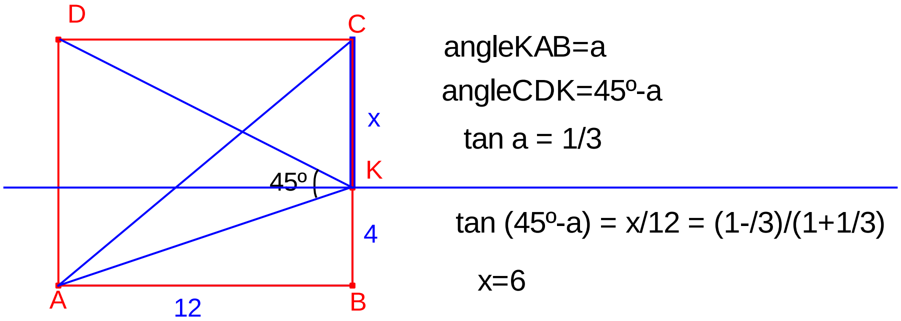
$R^2=(a^2+b^2)/2$

$[cercle]=Pi\cdot R^2=(D+J)\cdot Pi/2$

4360.- La figura està formada per un quadrat de costat 12.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:



angleKAB=a

angleCDK=45º-a

tan a = 1/3

tan (45º-a) = x/12 = (1-/3)/(1+1/3)

x=6