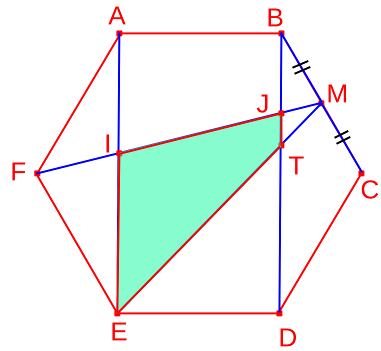
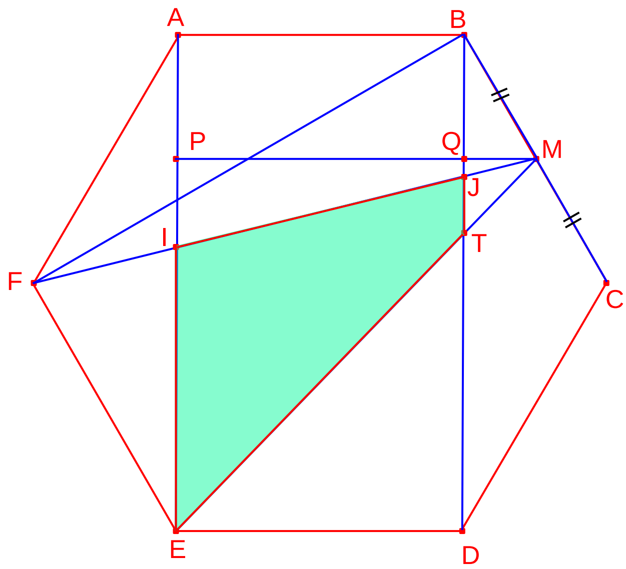
4361.- Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter $EIJT$ i l'hexàgon regular $ABCDEF$.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$
L'àrea és:

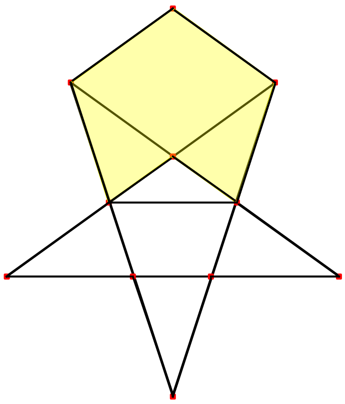
$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 6\sqrt{3}$$
$$\overline{BF} = 2\sqrt{3}$$



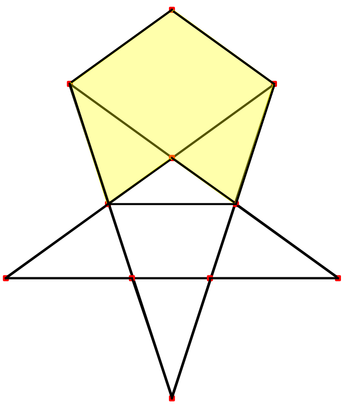
aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{BFM}$:
$$\overline{FM} = \overline{EM} = \sqrt{13}$$

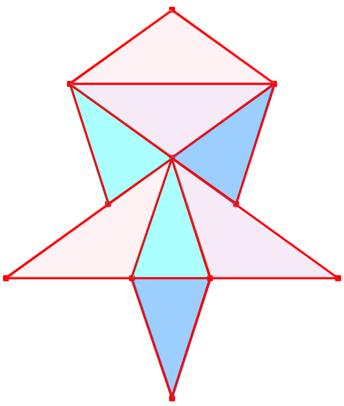
Siga $\angle MFE = \alpha$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{FEI}$:
$$\frac{\overline{IE}}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin(30° + \alpha)}$$
$$\overline{IE} = 2\frac{\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}} = \frac{8\sqrt{3}}{7}$$
$$\overline{MQ} = \frac{1}{2}, \overline{MP} = \frac{5}{2}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IPM}, \overset{\Delta}{JQM}$ són semblants i de raó 5 : 1
aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{JT} = \frac{1}{5}\overline{IE} = \frac{8\sqrt{3}}{35}$$
L'àrea del trapezi $ETJI$ és:
$$S_{ETJI} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{7} + \frac{8\sqrt{3}}{35}}{2} \cdot 2 = \frac{48\sqrt{3}}{35}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ETJI}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{48\sqrt{3}}{35}}{6\sqrt{3}} = \frac{8}{35}$$

4362.- La figura està formada per un pentàgon regular estrellat i un pentàgon regular.
Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea total.



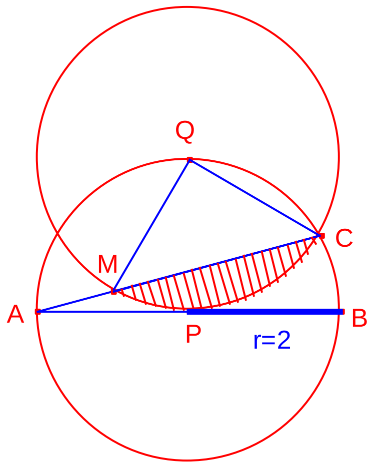
Solució:



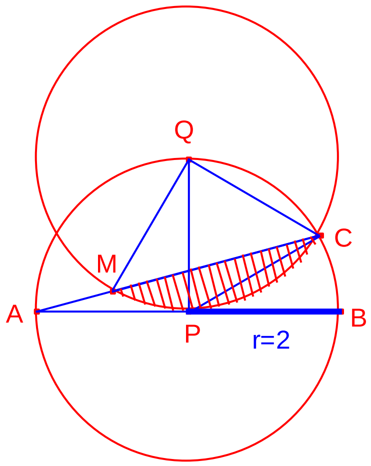


La proporció és $1:2$

4363.- La figura està formada per dues circumferències de radi 2.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada!



Solució

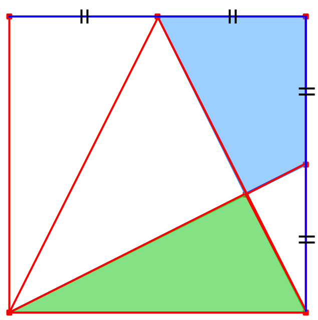


angleQPC=60º
angleCPB=30º
angleCAB=(1/2)angleCPB=15º

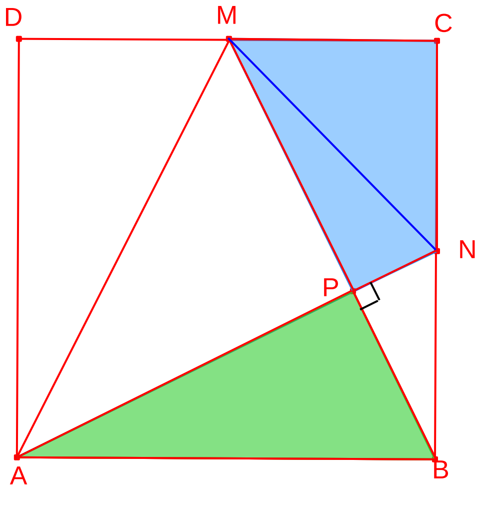
angleMQP=2·angleMAP=30º
angleMQC=90º

S=pi/4·2²-(1/2)·2²=pi-2

4364.- La figura està formada per un quadrat del qual s'ha traçat els punts migs de dos costats.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda.



Solució:

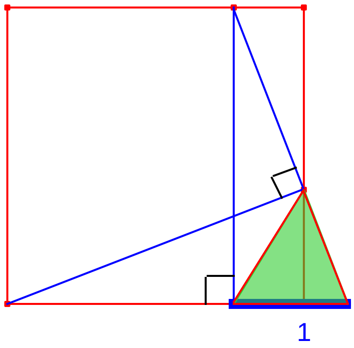


AB=1
angleNPB=90º
BP=x, AP=2x
Teorema Pitàgores APB
$5x^2=1$
$[APB]=x^2=1/5$

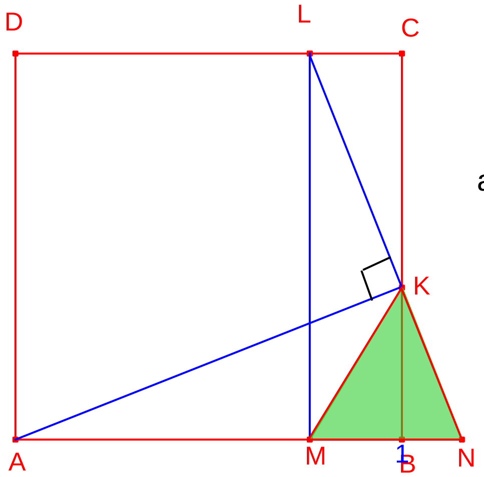
PN=x/2
AP=sqrt(5)/2
Teorema Pitàgores APM
MP=(3/10)sqrt(5)
[PNCM]=[PNM]+[MCN]=3/40+1/8=1/5

[PNCM]/[APB]=1

4365.- La figura està formada per un quadrat i un triangle ombrejat de base 1.
Calculeu la seua àrea.



Solució:



angleBKN=angleKAB=angleMLN

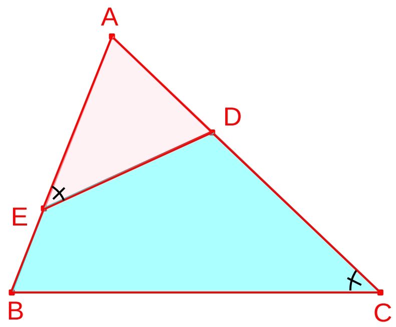
Els triangles rectangles ABK, LMN són iguals

BK=MN=1

[MNK]=1/2

4366.- Els perímetres dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AED}$ estan en proporció $1 : 2$

Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea blava.

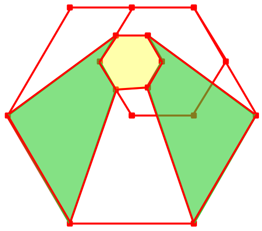


Solució:

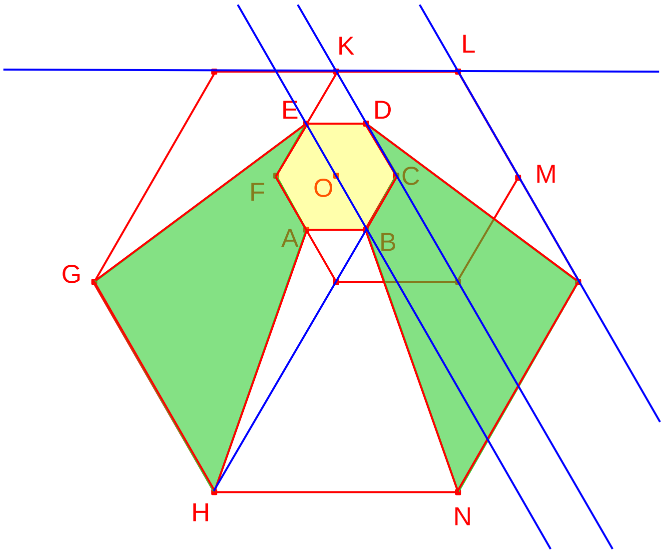
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADE}$ són semblants.
Les àrees són proporcionals als quadrats de la proporció dels perímetres.
La proporció entre l'àrea rosa i l'àrea blava és

$$\frac{S_{BCDE}}{S_{ADE}} = \frac{S_{ABC} - S_{ADE}}{S_{ADE}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} - 1 = 2^2 - 1$$

4367.- La figura està formada per tres hexàgons regulars. Calculeu la proporció entre l'àrea de l'hexàgon groc i l'àrea de la zona roja.



Solució:



Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$

$S_{ABCDEF} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\overline{BE} = 2, \overline{GH} = 4$

$d(O, \overline{GH}) = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

$d(A, \overline{HN}) = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

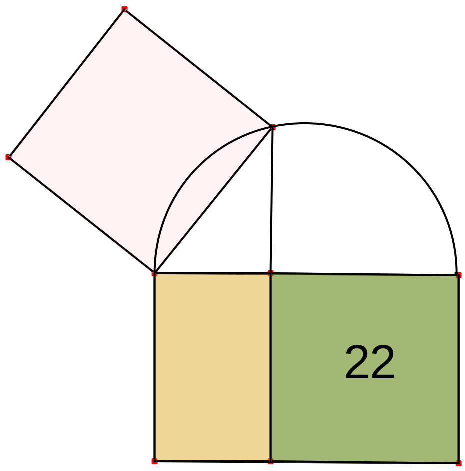
$S_{GHAFE} = S_{GHBE} - S_{EFAB} - S_{ABH} = \frac{4+2}{2} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{11}{2}\sqrt{3}$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{groga}}{S_{verda}} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{11}{2}\sqrt{3}} = \frac{3}{22}$$

4368.- La figura està formada per un rectangle auri, dos quadrats, el gran d'àrea 22 i una semicircumferència.

Calculeu l'àrea del quadrat rosa.



Solució:

Siga el rectangle auri $ABCD$ de costats $\overline{AD} = a, \overline{AB} = \frac{a}{\Phi}$

Siga el quadrat $BEFC$ d'àrea 22

$a^2 = 22$

El rectangle $AEFD$ és auri.

$\overline{AE} = a \cdot \Phi$

Siga O el punt mig del segment $\overline{DF}$, centre de la semicircumferència.

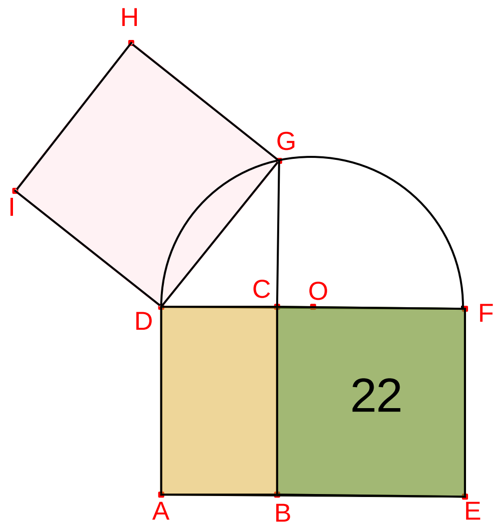
$\overline{OF} = \overline{OG} = \frac{a}{2}\Phi$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCG}, \overset{\Delta}{OCG}$:

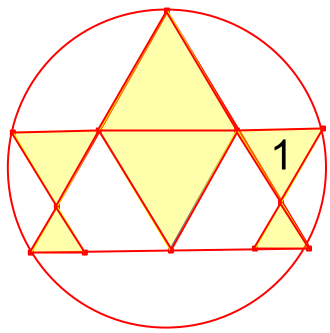
$$\overline{DG}^2 = \left(\frac{a}{\Phi}\right)^2 + \left(\left(\frac{a \cdot \Phi}{2}\right)^2 - \left(\frac{a \cdot \Phi}{2} - \frac{a}{\Phi}\right)^2\right) = a^2$$

L'àrea del quadrat $DGHI$ és:

$S_{DGHI} = a^2 = 22$



4369.- La figura està formada per una circumferència que conté 6 triangles equilàters dos d'ells d'àrea 1.
Calculeu l'àrea de la suma dels 6 triangles equilàters.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$ i àrea 1.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADE}$ de costat $\overline{AD} = b$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CFG}$ de costat $\overline{CF} = a + b$

Siga M el punt mig del costat $\overline{GC}$

$$\overline{MB} = \frac{3a+b}{2}$$

Siga O el centre de la circumferència circumscrita.

$$\overline{OF} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{FE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(a+b)$$

$$\overline{OM} = \overline{OF} - \overline{FM} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(a+b) - \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b) = \frac{\sqrt{3}}{6}(a+b)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}(a+b)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}(a+b)\right)^2 + \left(\frac{3a+b}{2}\right)^2$$

Simplificant:

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{S_{CFG}}{S_{ABC}} = \left(\frac{a+b}{a}\right)^2 = \Phi^2$$

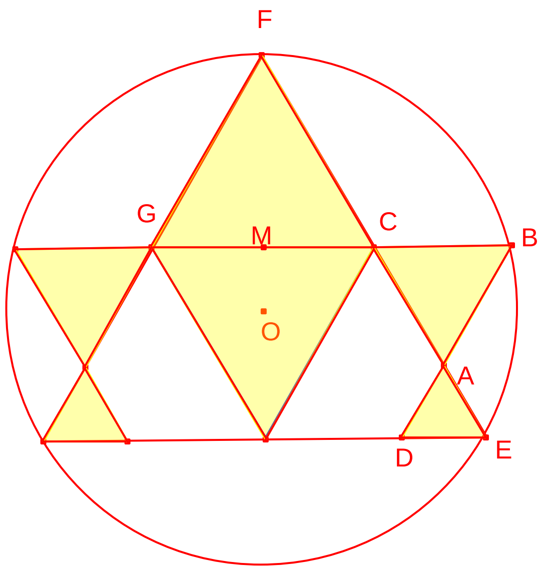
$$S_{CFG} = \Phi^2$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{\Phi^2}$$

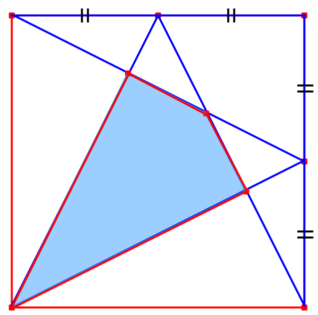
$$S_{ADE} = \frac{1}{\Phi^2}$$

L'àrea ombrejada és:

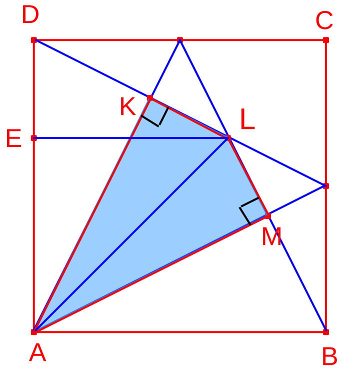
$$S_{ombrejada} = 2(S_{ABC} + S_{CFG} + S_{ADE}) = 2\left(1 + \Phi^2 + \frac{1}{\Phi^2}\right) = 8$$



4370.- La figura està formada per un quadrat i quatre segments que uneixen vèrtexs amb punts migs dels costats.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=2

[ABCD]=4

angleAKL=90º

KDL=x, AK=2x

x=(2/5)sqrt(5)

EL=y, DE=y/2, AE=EL=2-y/2=y

y=4/3

DL=(2/3)sqrt(5)

KL=DL-x=(4/15)sqrt(5)

[AKLM]=AK·KL=16/15

[AKLM]/[ABCD]=4/15