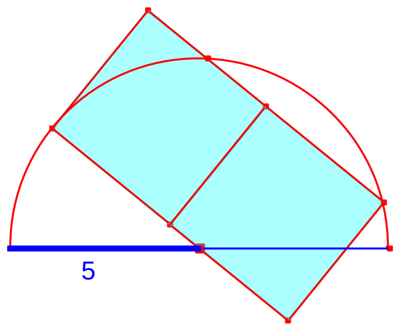
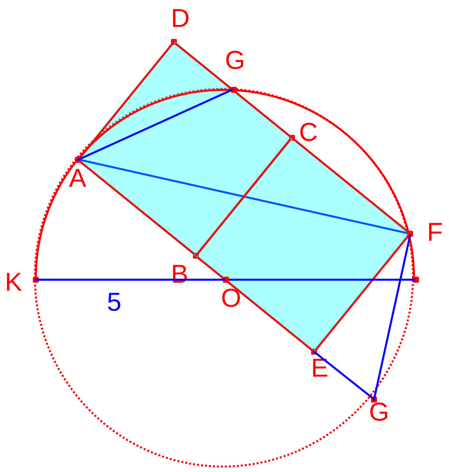
Problemes de Geometria per a l'ESO 438

4371.- La figura està formada per una semicircumferència de radi 5 i dos quadrats. Calculeu l'àrea ombrejada pels dos quadrats.



Solució:



AB=a, FG=b

AF=a·sqrt(5)

Els triangles rectangles AFG, AEF són semblants

Aplicant Teorema de Tales:

b/10=a/(a·sqrt(5))

b=2·sqrt(5)

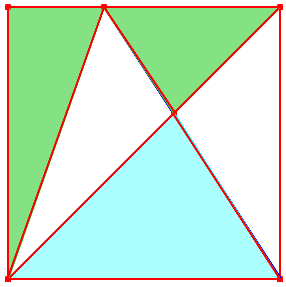
Teorema Pitàgores AFG

$5a^2=10^2-(2\cdot \text{sqrt}(5))^2$

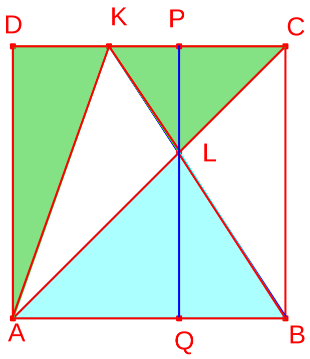
$a^2=16$

[AEFD]=32

4372.- En el quadrat de la figura s'han dibuixat tres triangles.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea blava.



Solució:



AB=1
AQ=QL=x
BQ=CP=PL=1-x

KPL, BQL semblants

Teorema de Tales

$PK=(1-x)^2/x$

$CK=(1-x)/x$

$DK=(2x-1)/x$

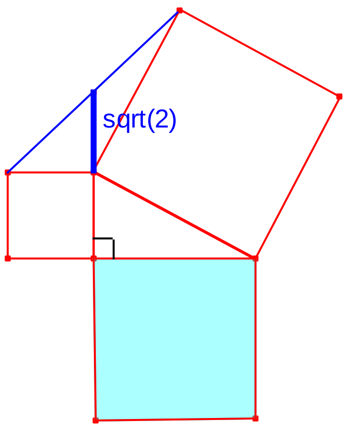
$[CKL]+[DKA]=(1/2)(1-x)^2/x+(1/2)(2x-1)/x=x/2$

$[ABL]=x/2$

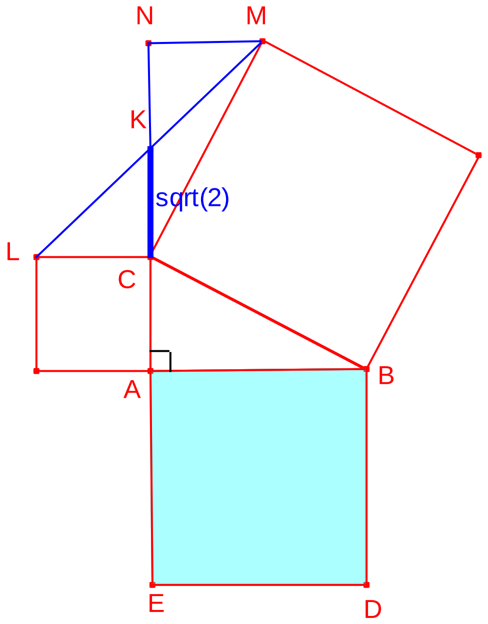
[verda]/[blava]=1

Notem que les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ALK}, \overset{\Delta}{BCL}$ són iguals.

4373.- La figura està formada per tres quadrats sobre els costats d'un triangle rectangle. Calculeu l'àrea del quadrat blau.



Solució:



BC=a, AC=b, AB=c

Els triangles CAB, MNC són iguals

MN=b

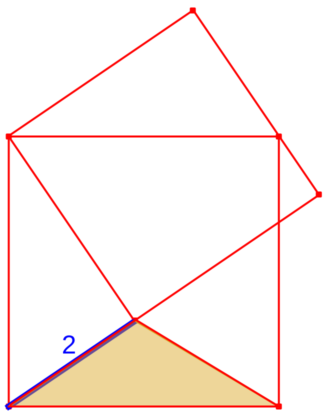
[LCM]=[ABC]

(1/2)·sqrt(2)·2b=(1/2)ab

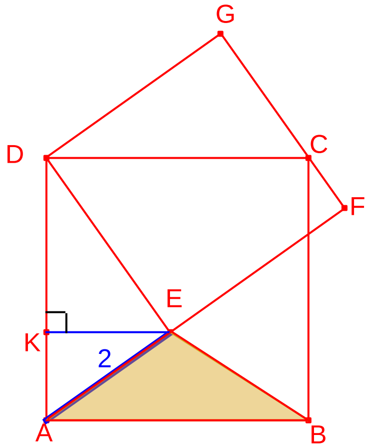
a=2·sqrt(2)

[ABDE]=a²=8

4374.- La figura està formada per dos quadrats que comparteixen un vèrtex. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



AB=c, DE=d

Triagles DEA, DGC iguals

ange¡lAED=90º

Teorema Pitàgores ADE

$c^2-d^2=4$

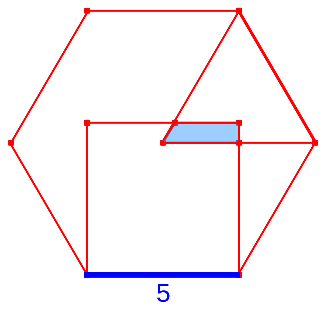
AED, AKE semblants

AK/2=2/c

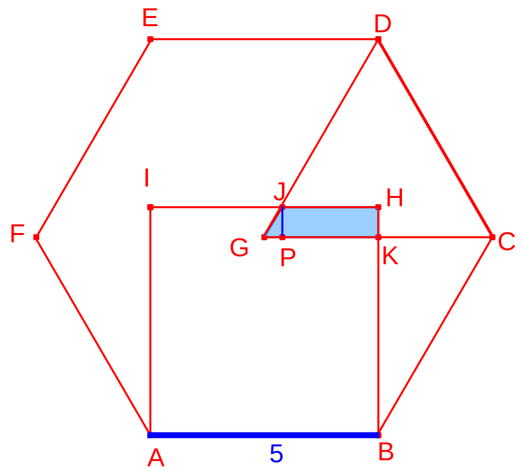
AK=4/c

[ABE]=(1/2)c·(4/c)=2

4375.- La figura està formada per un hexàgon regular un quadrat i un triangle equilàter.
Calculeu l'àrea de la intersecció dels tres polígons regulars.



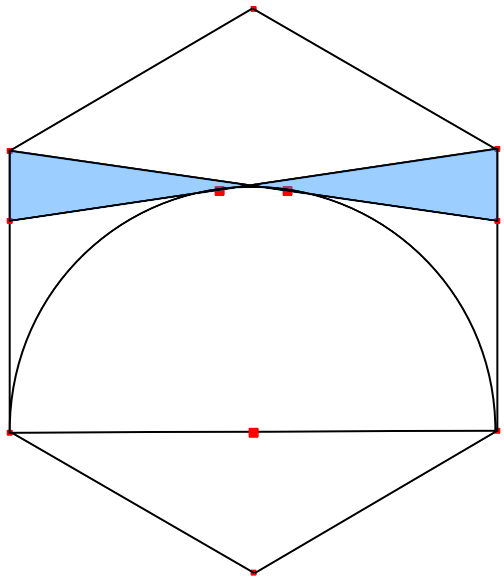
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 5$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CDG}$
G és el centre de l'hexàgon regular.
Siga el quadrat $ABHI$
Siga el polígon $GKHJ$.
K és el punt mig del segment $\overline{CG}$



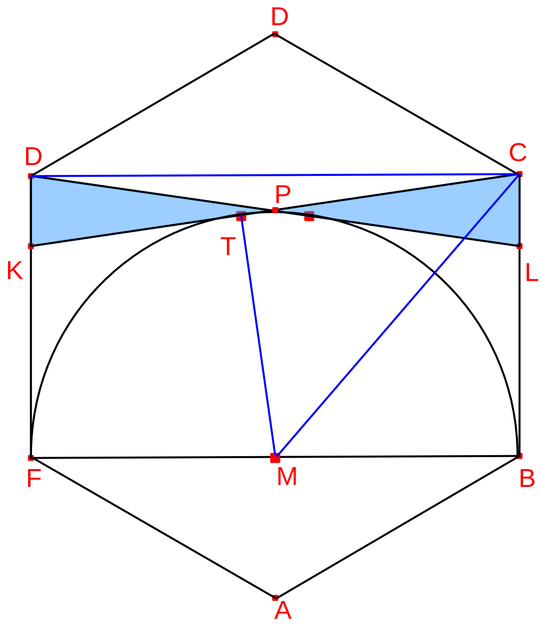
$\overline{GK} = \frac{5}{2}$
$\overline{BK} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$
$\overline{KH} = \overline{BH} - \overline{BK} = 5 - \frac{5}{2}\sqrt{3}$
Siga P la projecció de J sobre $\overline{GC}$
$\overline{GP} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{HK} = \frac{5}{6}\left(2\sqrt{3} - 3\right)$
$\overline{JH} = \overline{GK} - \overline{GP} = \frac{5}{3}\left(3 - \sqrt{3}\right)$
L'àrea del trapezi rectangle $GKHJ$ és:

$$S_{GKHJ} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{5}{3}\left(3 - \sqrt{3}\right)}{2} \cdot \left(5 - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{25}{24}\left(24 - 13\sqrt{3}\right)$$

4376.- La figura està formada per un hexàgon regular.
Des de dos vèrtexs de l'hexàgon regular s'ha traçat dues tangents a la semicircumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.

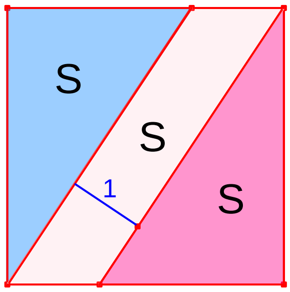


Solució:

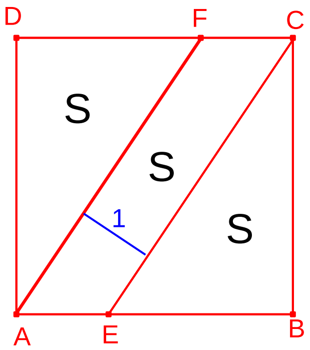


AB=1
angleMCB=angleMCT=x
BM=sqrt(3)/2
CD=sqrt(3)
tan x=sqrt(3)/2
tan(2x)=4·sqrt(3)
DK=a
x/sqrt(3)=ctan(2x)=1/(4·sqrt(3))
x=1/4
[blava]=[CDK]=(1/8)sqrt(3)
[ABCDEF]=(3/2)sqrt(3)
[blava]/[ABCDEF]=1/12

4377.- La figura està formada per un quadrat i dos segments que divideixen el quadrat en tres polígons d'igual àrea.
La distancia entre els dos segments és 1.
Calculeu l'àrea del quadrat.

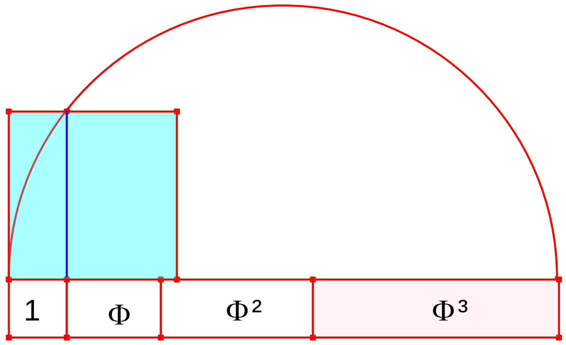


Solució:



L'àrea del quadrilàter $AECF$ i del triangle $\overset{\Delta}{EBC}$ són iguals i tenen la mateixa altura.
Aleshores:
$\overline{AE} = x, \overline{EB} = 2x$
$\overline{BC} = 3x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EBC}$:
$\overline{EC} = x\sqrt{13}$
$S_{AECF} = x \cdot 3x = x\sqrt{13} \cdot 1$
$x = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$
L'àrea del quadrat és:
$S_{ABCD} = 9x^2 = 13$

4378.- La figura està formada per un quadrat i tres rectangles d'àrees $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3$ i una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre el quadrat blau i el rectangle rosa.



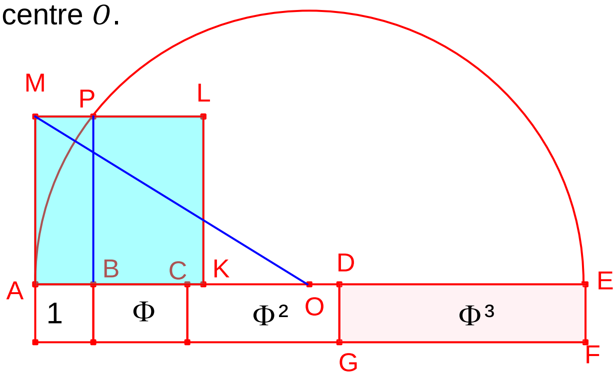
Solució:
Siguen $\overline{AB} = 1, \overline{BC} = \Phi, \overline{CD} = \Phi^2 = 1 + \Phi, \overline{DE} = \Phi^3 = 1 + 2\Phi$
L'àrea del rectangle $DEFG$ és:
$S_{DEFG} = 1 + 2\Phi$

$\overline{AE} = 3 + 4\Phi$ diàmetre de la semicircumferència de centre O.

$$\overline{OA} = \overline{OP} = \frac{3 + 4\Phi}{2}$$

$$\overline{OB} = \frac{3 + 4\Phi}{2} - 1 = \frac{1 + 4\Phi}{2}$$

Siga $\overline{AM} = \overline{BP} = c$, costat del quadrat $AKLM$



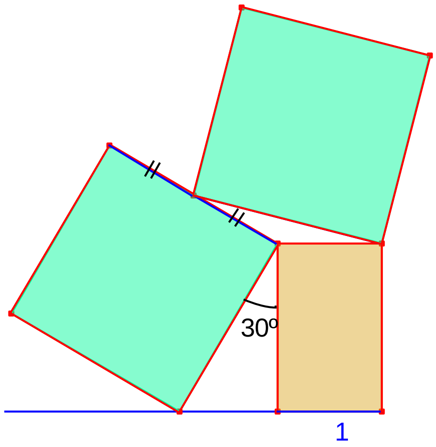
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBP}$:

$$c^2 = \left(\frac{3 + 4\Phi}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 + 4\Phi}{2}\right)^2 = 2 + 4\Phi$$

L'àrea del quadrat $AKLM$ és:
$S_{AKLM} = c^2 = 2 + 4\Phi$
La proporció d'àrees és:
$S_{AKLM} = c^2 = 2 + 4\Phi$

$$\frac{S_{AKLM}}{S_{DEFG}} = \frac{2 + 4\Phi}{1 + 2\Phi} = 2$$

4379.- En la figura els dos quadrats verds són iguals.
Calculeu l’àrea del rectangle groc.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 1, \overline{BC} = a$

$\overline{DG} = \overline{CJ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{JG} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{JDC}$:

$\frac{4}{3}a^2 = 1 + \frac{1}{3}a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$

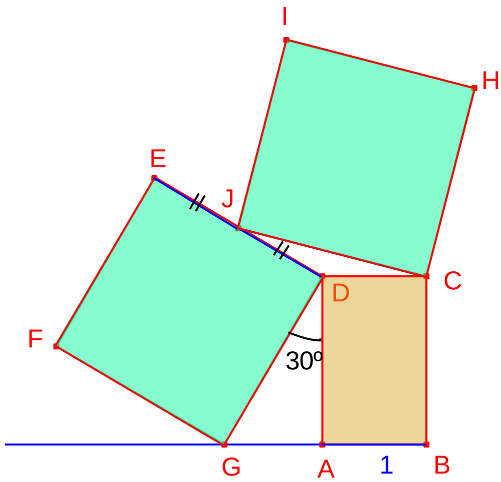
Simplificant:

$a^2 - a - 1 = 0$

$a = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

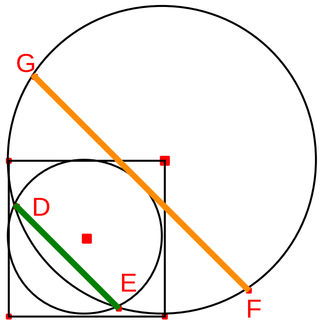
El rectangle $ABCD$ és auri, la seua àrea és:

$S_{ABCD} = 1 \cdot a = \Phi$

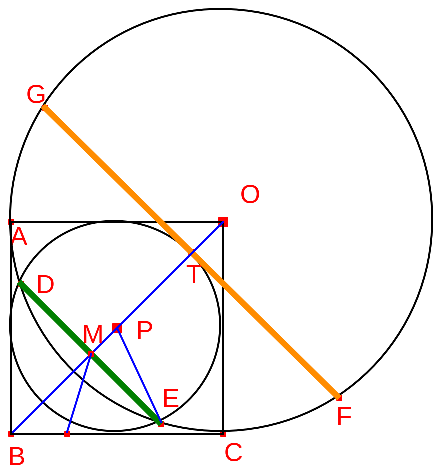


4380.- La figura està formada per un quadrat i dues circumferències.
Calculeu la proporció:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{FB}}$$



Solució:
Siga el quadrat $OABC$ de costat $\overline{OA} = 2$
$\overline{OE} = 2$
$\overline{PE} = 1, \overline{OP} = \sqrt{2}$
Siga $\alpha = \angle EPO$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OPE}$:

$$4 = 1 + 2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

Siga M el punt mig del segment $\overline{DE}$

$$\overline{ME} = \overline{PE} \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\overline{DE} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\overline{OT} = \overline{OP} - \overline{PT} = \sqrt{2} - 1$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FTO}$:

$$\overline{FT} = \sqrt{4 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^2} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}}$$

$$\overline{FG} = 2\sqrt{1 + 2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{FG}} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{2}}{\sqrt{1 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2} - 1}{8}}$$