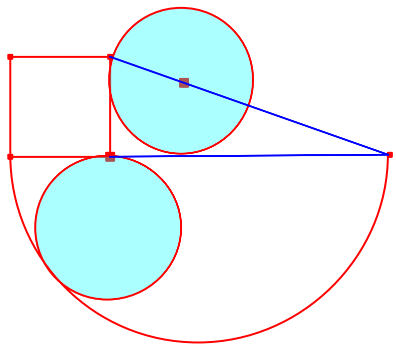
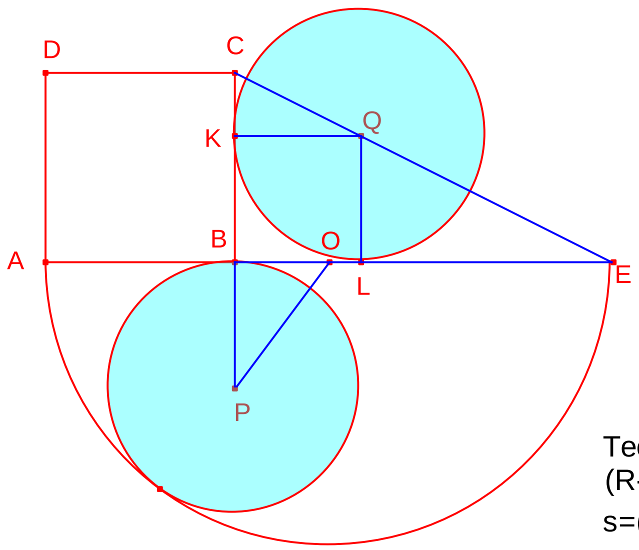
4381.- La figura està formada per un semicercle, un quadrat, un triangle i dos cercles. Es destaquen un centre i un punt de tangència. Demostreu que els cercles són iguals.



Solució:



AB=1

QK=QL=r

LE=x

els triangles EKQ, QLE semblants

Aplicant el teorema de Tales

$x=r^2/(1-r)$

$OA=R=(1+r+x)/2=1/(2(1-r))$

PB=s

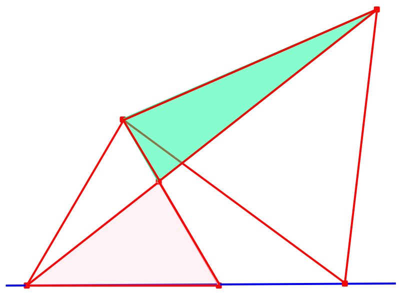
OP=R-s, OB=R-1

Teorema de Pitàgores OBP

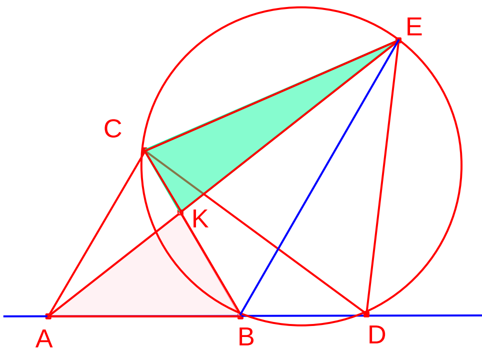
$(R-s)^2=s^2+(R-1)^2$

$s=(2R-1)/(2R)=r$

4382.- Dos triangles equilàters comparteixen un vèrtex. Quina és la proporció entre l’àrea rosa i la verda.



Solució:



AB=c, BC=d

angleCBD=120º, angleBED=60º

El quadrilàter CBDE inscriptible

angleCBE=60º

angleABE=120º

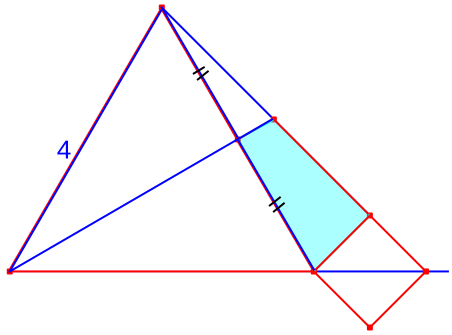
[ABE]=(1/2)c·BE·sin120º

[CBE]=(1/2)c·BE·sin60º

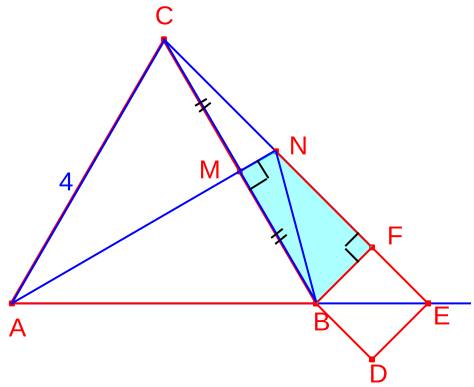
[ABE]=[CBE]

[CKE]=[ABK]

4383.- La figura està formada per un triangle equilàter de costat 4 i un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejant.



Solució:



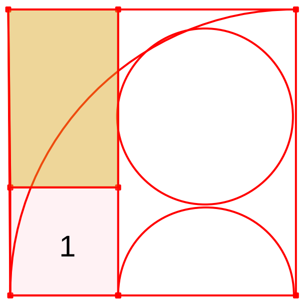
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siga el quadrat $BDEF$ de costat $\overline{BF} = c$
$\angle CBF = 75°, \angle BCN = \angle CBN = 15°, \angle NBF = 60°$

$\overline{FN} = c\sqrt{3}, \overline{BN} = \overline{CN} = 2c$
$\overline{MN} = 2\sqrt{c^2 - 1}$

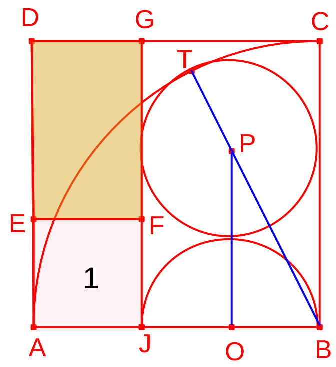
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BFC}$:
$16 = c^2 + \left(2c + c\sqrt{3}\right)^2$
$c^2 = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)$
L'àrea del quadrilàter $MBFN$ és:

$$S_{MBFN} = S_{MBN} + S_{BFN} = \frac{1}{2}2 \cdot 2\sqrt{7}4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 4\left(2 - \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + 2\left(2\sqrt{3} - 3\right)$$

4384.- La figura està formada per un quadrat que conté: un quadrat d'àrea 1, un rectangle ombrejat un quadrant un semicercle i un cercle.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



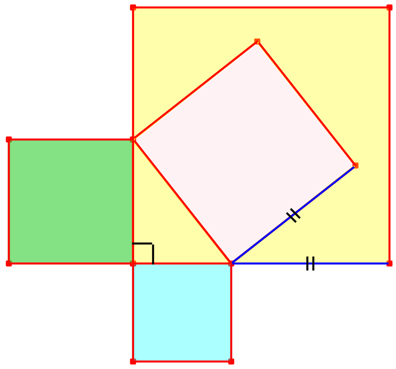
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga el quadrat $AJFE$ de costat $\overline{AJ} = 1$
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{JB} = 2r$.
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = r$
$\overline{DE} = 2r$
$\overline{AB} = 1 + 2r$
$\overline{BP} = 1 + r, \overline{OP} = 2r$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POB}$:
$(1 + r)^2 = 4r^2 + r^2$
$4r^2 - 2r - 1 = 0$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$
$$\overline{DE} = 2r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
L'àrea del rectangle $DEFG$ és:
$$S_{DEFG} = 1 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

4385.- Els costats dels triangle rectangle de la figura estan en progressió geomètrica (triangle de Kepler). sobre l'exterior dels costats s'han dibuixat tres quadrats.
Un quart quadrat s'ha dibuixat sobre els catets del triangle rectangle.
Calculeu:

a) La proporció entre l'àrea rosa i l'àrea verda.
b) La proporció entre l'àrea verda i l'àrea blava
c) La proporció entre l'àrea groga i la rosa.



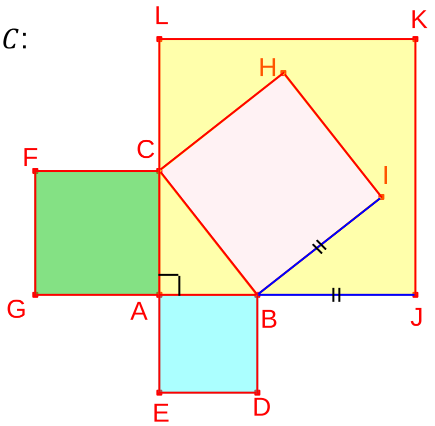
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$ que té els costats en progressió geomètrica.
$\overline{AB} = 1, \overline{AC} = k, \overline{BC} = k^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$k^4 = 1 + k^2$
Resolent l'equació:

$$k^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

$S_{ABCD} = 1, S_{ACFG} = \Phi, S_{BCHI} = \Phi^2$



a)

$$\frac{S_{BCHI}}{S_{ACFG}} = \Phi$$

b)

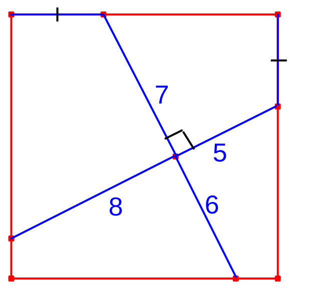
$$\frac{S_{ACFG}}{S_{ABDE}} = \Phi$$

c)
$\overline{AJ} = 1 + \Phi$
L'àrea groga és:

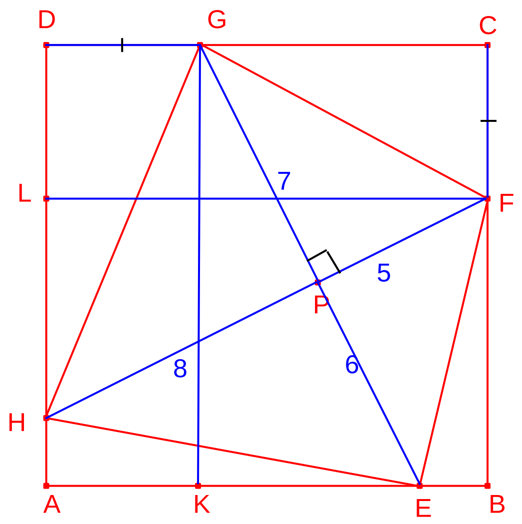
$$S_{groga} = S_{AJKL} - S_{BCHI} = (1+\Phi)^2 - \Phi^2 = 1 + 2\Phi = \Phi(1+\Phi) = \Phi^3$$

$$\frac{S_{groga}}{S_{BCHI}} = \Phi$$

4386.- En la figura calculeu l'àrea del quadrat exterior.



Solució:



CF=DG=a

KE=LH=b

AH=BE=c

$GF^2=74=a^2+(b+c)^2$

$EF^2=61=c^2+(b+c)^2$

$13=a^2-c^2=(a+c)(a-c)$

$EH^2=100=c^2+(a+b)^2$

$39=(a+b)^2-(b+c)^2=(a+2b+c)(a-c)$

1/3=(a+c)/a+2b+c)

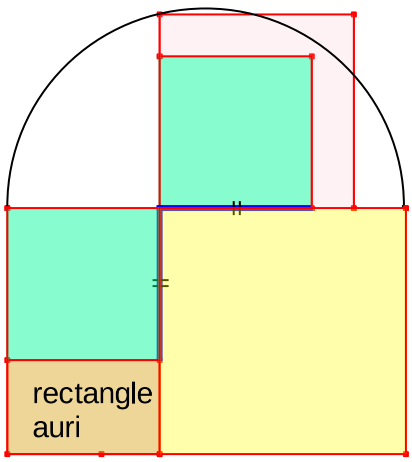
b=a+c)

Teorema Pitàgores GKE

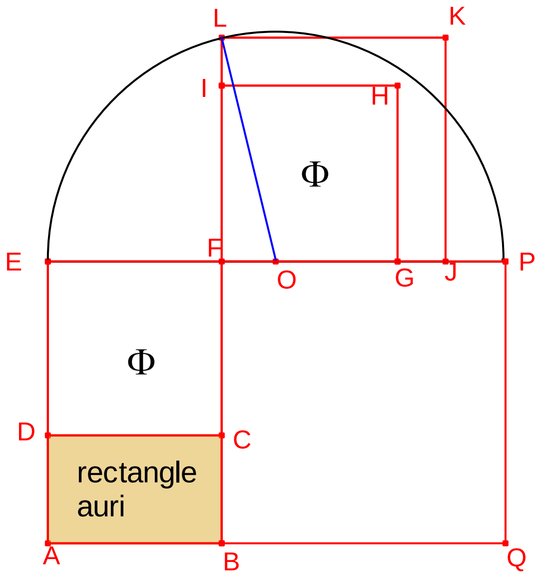
$13^2=5(a+c)^2$

$[ABCD]=(a+b+c)^2=4(a+b)^2=(4/5)13^2$

4387.- La figura està formada per quatre quadrats i un rectangle auri i un semicercle.
Els dos quadrats verds són iguals i tenen àrea Φ
Calculeu l'àrea ombrejada de rosa.



Solució:



Siga el rectangle auri $ABCD$.
Siguen els quadrats $CDEF, FGHI$ d' àrees Φ

$\overline{EF} = \overline{FG} = \sqrt{\Phi}$

$\overline{BC} = \frac{1}{\Phi}\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}$

$\overline{BF} = \frac{1}{\sqrt{\Phi}} + \sqrt{\Phi} = \Phi\sqrt{\Phi}$

$\overline{EP} = \sqrt{\Phi} + \Phi\sqrt{\Phi} = \Phi^2\sqrt{\Phi}$

Siga O el centre del semicercle de diàmetre $\overline{EP}$.

$\overline{OF} = \frac{\Phi^2\sqrt{\Phi}}{2}, \overline{OF} = \frac{\Phi^2\sqrt{\Phi},}{2} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{\Phi}}$

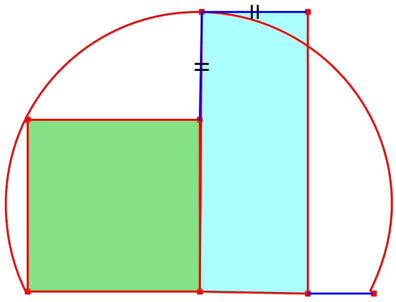
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FOL}$:

$\overline{FL}^2 = \Phi^5 - \frac{1}{4\Phi} = 1 + \Phi$

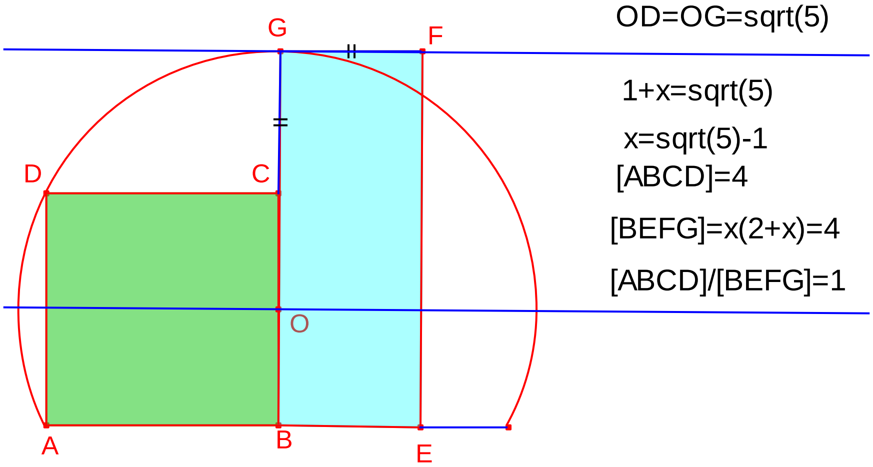
L'àrea rosa és:

$S_{rosa} = S_{FJKL} - S_{FGHI} = 1 + \Phi - \Phi = 1$

4388.- La figura està formada per un segment de circumferència que conté un quadrat verd i un rectangle blau.
Calculeu la proporció entre l’àrea del quadrat i l’àrea del rectangle.



Solució:



AB=2, CG=GF=x

OB=OC=1

OD=OG=sqrt(5)

1+x=sqrt(5)

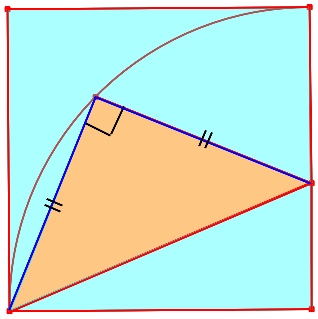
x=sqrt(5)-1

[ABCD]=4

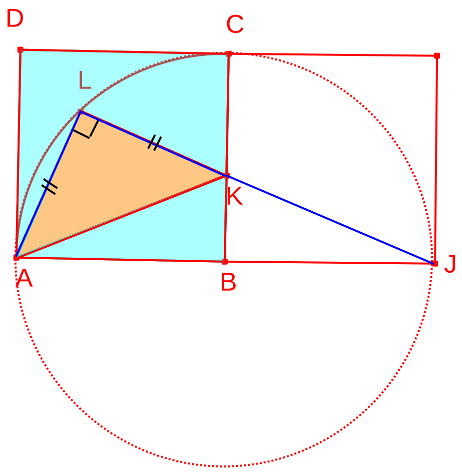
[BEFG]=x(2+x)=4

[ABCD]/[BEFG]=1

4389.- La figura està formada per un quadrat un quadrant i una triangle rectangle isòsceles. Calculeu la proporció entre l'àrea taronja i l'àrea blava.



Solució:



AB=a, AL=LK=x

AK=JK=x·sqrt(2)

Teorema Pitàgores ALJ

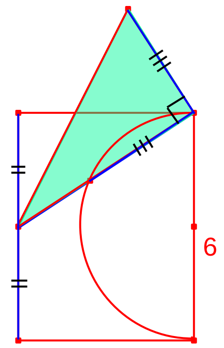
$x^2+(1+sqrt(2))^2x^2=4a^2$

[taronja]=(1/2)x^2

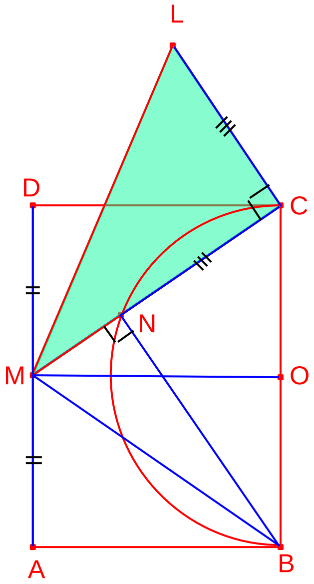
[Blava]=[ABCD]-[ALK]=a^2-(1/2)x^2=(1+sqrt(2))/2

[Taronja]/[Blava]=sqrt(2)-1

4390.- La figura està formada per un rectangle que té un costat que mesura 6, un semicercle amb diàmetre sobre aquest costat i un triangle rectangle
Calculeu l’àrea del triangle ombrejat.



Solució:



$BC=6$, $AB=b$

$CN=CL=a$

teorema Pitàgores BNC, MAB

$BN^2=36-a^2$

$BM^2=9+b^2$

teorema Pitàgores BNM

$MN=\mathrm{sqrt}(a^2+b^2-27)$

teorema Pitàgores MOC

$9+b^2=b^2+a^2-27+a^2+2a\cdot\mathrm{sqrt}(a^2+b^2-27)$

$a^2+a\cdot\mathrm{sqrt}(a^2+b^2-27)=18$

$[MCL]=(1/2)a(a+\mathrm{sqrt}(a^2+b^2-27))=9$