Problemes de Geometria per a l'ESO 44

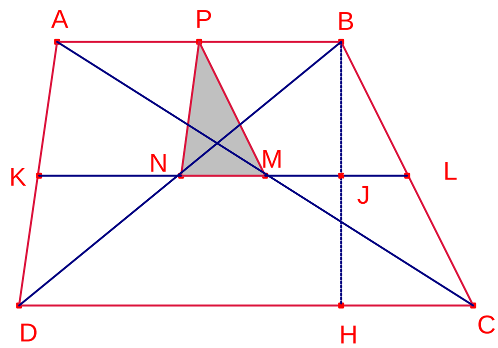
431.- Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AB}=15$, $\overline{CD}=24$ i altura $h=14$. Siga M el punt mig de la diagonal , N el punt mig de la diagonal $\overline{BD}$ i P el punt mig del costat $\overline{AB}$. Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNP}$.

Solució:

$\overline{MN}$ pertany a la paral·lela mitjana del trapezi.

La paral·lela mitjana intersecta els costats $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ en els punts K, L, respectivament.

$\overline{KJ}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}=\dfrac{39}{2}$



Siga $h=\overline{BH}=14$ altura del trapezi.

$\overline{BH}$ talla pa paral·lela mitjana $\overline{KL}$ en el punt J.

$\overline{BJ}=7$.

$\overline{KN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{KN}=\dfrac{\overline{AB}}{2}=\dfrac{15}{2}$.

$\overline{ML}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

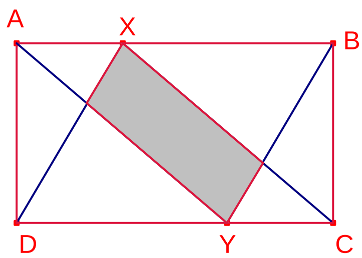
$\overline{ML}=\dfrac{\overline{AB}}{2}=\dfrac{15}{2}$.

$\overline{MN}=\overline{KL}-\left(\overline{KN}+\overline{ML}\right)=\dfrac{39}{2}-\left(\dfrac{15}{2}+\dfrac{15}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNP}$ és:

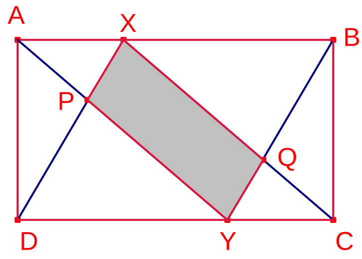
$$S_{MNP}=\frac{\overline{MN}\cdot\overline{BJ}}{2}=\frac{\frac{9}{2}\cdot 7}{2}=\frac{63}{4}.$$

432.- Els punts X, Y divideixen els costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament, del rectangle ABCD en raó 1:2 (veure figura).
Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter gris i del rectangle ABCD.
KöMaL, K304



Solució:

Siga P la intersecció dels segments $\overline{AY}$, $\overline{DX}$.
Siga Q la intersecció dels segments $\overline{BY}$, $\overline{CX}$.
Siga $\overline{AX} = \overline{CY} = x$, aleshores, $\overline{BX} = \overline{DY} = 2x$.
Siga $\overline{AD} = \overline{BC} = b$.
L'àrea del rectangle ABCD és:
$S_{ABCD} = 3xb$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADX}$, $\overset{\Delta}{CBY}$ la seua àrea és:

$$S_{ADX} = S_{CBY} = \frac{xb}{2}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AXP}$, $\overset{\Delta}{YDP}$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{\overline{AX}}{\overline{DY}} = \frac{1}{2}$.

Aleshores, les seues altures estan en raó 1:2.

Per tant, l'altura del triangle $\overset{\Delta}{YDP}$ sobre el costat $\overline{DY}$ és $\frac{2}{3}b$.

Els triangles $\overset{\Delta}{YDP}$, $\overset{\Delta}{XBQ}$ són iguals la seua àrea és:

$$S_{CBY} = S_{XBQ} = \frac{2x\frac{2}{3}b}{2} = \frac{2xb}{3}.$$

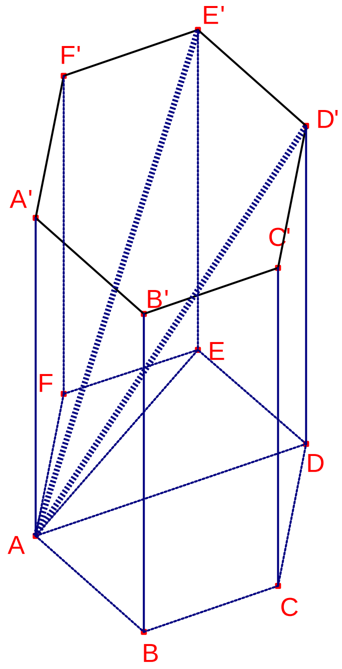
L'àrea del paral·lelogram XPYQ és:

$$S_{XPYQ} = S_{ABCD} - (2\cdot S_{ADX} + 2\cdot S_{YDP}) = 3xb - \left(xb + \frac{4xb}{3}\right) = \frac{2xb}{3}.$$

La proporció entre les àrees del quadrilàter gris i del rectangle ABCD és:

$$\frac{S_{XPYQ}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{2xb}{3}}{3xb} = \frac{2}{9}.$$

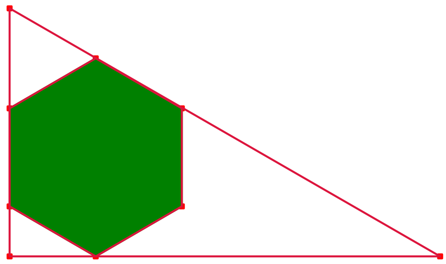
433.- Les diagonals d'un prisma hexagonal regular mesuren 12 i 13.
Calculeu el volum del políedre.
KöMaL, C492



Solució:
Notem que un prima regular hexagonal de bases ABCDEF, A'B'C'D'E'F' té dos tipus de diagonals:
$\overline{AD'}$, i $\overline{AE'} = \overline{AC'}$.
Siga $a = \overline{AB}$ aresta de la base, $h = \overline{AA'} = \overline{DD'} = \overline{EE'}$ altura del prisma.
$\overline{AD} = 2a$ diagonal de la base.
$\overline{AE} = a\sqrt{3}$ diagonal de la base.
Siga $\overline{AD'} = 13$. $\overline{AE'} = 12$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADD'}$:
$$13^2 = (2a)^2 + h^2 \qquad (1)$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEE'}$:
$$12^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + h^2. \qquad (2)$$
Resolent el sistema format per les expressions (1) (2):
$$\begin{cases} 4a^2 + h^2 = 169 \\ 3a^2 + h^2 = 144 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 5 \\ h = \sqrt{69} \end{cases}.$$
L'àrea del hexàgon ABCDEF és:
$$S_b = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{2}.$$
El volum del prisma és:
$$V = S_b \cdot h = \frac{75\sqrt{3}}{2}\sqrt{69} = \frac{225\sqrt{23}}{2}.$$

434.- En un triangle rectangle 90º, 60º, 30º s'ha inscrit un hexàgon (veure figura).
Calculeu la raó de proporcionalitat de les seues àrees.

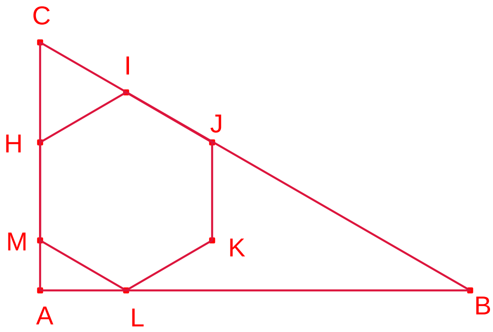


Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A=90^o$, $B=30^o$, $C=60^o$

Siga $x=\overline{HI}$ costat de l'hexàgon regular HIJKLM..

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{HIC}$ és equilàter.



$\angle ALM=30^o$, $\overline{ML}=x$, aleshores, $\overline{MA}=\frac{x}{2}$.

$\overline{AC}=\overline{AM}+\overline{MH}+\overline{HC}=\frac{x}{2}+x+x=\frac{5}{2}x$.

$\overline{BC}=5x$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a la meitat de l'àrea d'un triangle equilàter de costat $\overline{BC}=5x$:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\frac{(5x)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{25\sqrt{3}}{8}x^2.$$

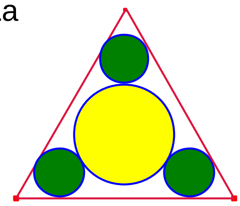
L'àrea de l'hexàgon regular HIJKLM és igual a sis vegades l'àrea d'un triangle equilàter de costat $x=\overline{HI}$.

$$S_{HIJKLM}=6\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2.$$

La proporció entre les àrees de l'hexàgon HIJKLM i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

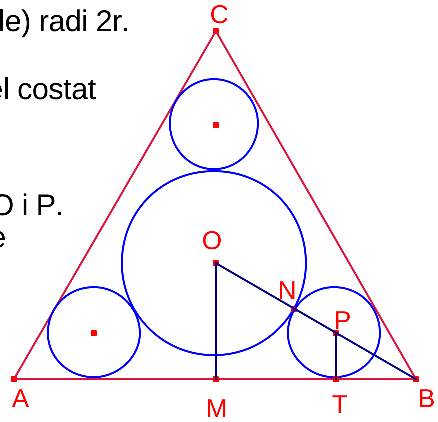
$$\frac{S_{HIJKLM}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2}{\frac{25\sqrt{3}}{8}x^2}=\frac{12}{25}.$$

435.- En un triangle equilàter s'han dibuixat 4 circumferències. La circumferència central té doble radi que les altres (veure figura). Si el costat del triangle equilàter és c, calculeu el radi de les tres circumferències menudes.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siga la circumferència central de centre O (baricentre del triangle) radi 2r.
Siga la circumferència de centre P i radi r.
Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre P i el costat $\overline{AB}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt de tangència de les circumferències de centres O i P.
La recta BP és bisectriu de l'angle B ja que la circumferència de centre P és tangent als costats, aleshores:



$\angle MBP = 30^{o}$.

Aleshores, $\overline{BP} = 2 \cdot \overline{PT} = 2r$.

$\overline{BO} = \overline{ON} + \overline{NP} + \overline{BP} = 5r$.

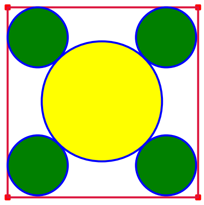
$\overline{BM} = \frac{c}{2}$.

$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2}5r$. Igualant ambdues expressions:

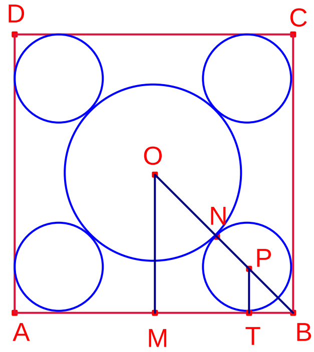
$\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}5r$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{\sqrt{3}}{15}c$.

436.- En un quadrat s'han dibuixat 5 circumferències. La circumferència central té doble radi que les altres (veure figura). Si el costat del quadrat és c, calculeu el radi de les quatre circumferències menudes.

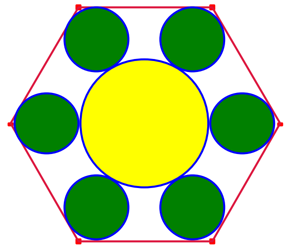


Solució:

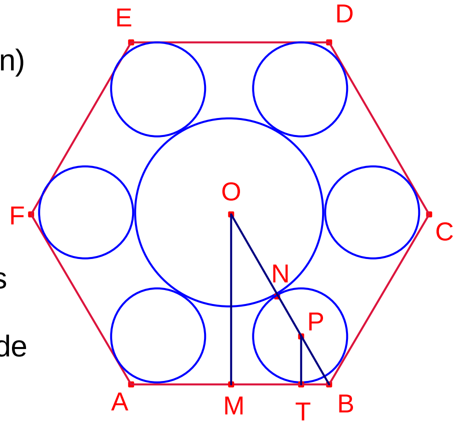


Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.
Siga la circumferència central de centre O (centre del quadrat) radi 2r.
Siga la circumferència de centre P i radi r.
Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre P i el costat $\overline{AB}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt de tangència de les circumferències de centres O i P.
La recta BP és bisectriu de l'angle B ja que la circumferència de centre P és tangent als costats, aleshores:
$\angle MBP = 45^{\circ}$.
Aleshores, $\overline{BP} = \sqrt{2} \cdot \overline{PT} = r\sqrt{2}$.
$\overline{BO} = \overline{ON} + \overline{NP} + \overline{BP} = 2r + r + r\sqrt{2} = \left(3 + \sqrt{2}\right)r$.
$\overline{BO} = \frac{c}{2}\sqrt{2}$. Igualant ambdues expressions:
$\frac{c\sqrt{2}}{2} = \left(3 + \sqrt{2}\right)r$. Resolent l'equació en la incògnita r:
$r = \frac{3\sqrt{2} - 2}{14}c$.

437.- En un hexàgon regular s'han dibuixat 7 circumferències. La circumferència central té doble radi que les altres (veure figura). Si el costat de l'hexàgon regular és c, calculeu el radi de les sis circumferències menudes.



Solució:



Siga l'hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB} = c$.
Siga la circumferència central de centre O (centre de l'hexàgon) radi 2r.
Siga la circumferència de centre P i radi r.
Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre P i el costat $\overline{AB}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt de tangència de les circumferències de centres O i P.
La recta BP és bisectriu de l'angle B ja que la circumferència de centre P és tangent als costats, aleshores:
$\angle MBP = 60^\circ$.

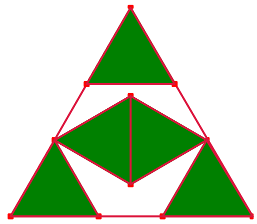
Aleshores, $\overline{BP} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{PT} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$.

$$c = \overline{BO} = \overline{ON} + \overline{NP} + \overline{BP} = 2r + r + \frac{2\sqrt{3}}{3} r = \left(\frac{9 + 2\sqrt{3}}{3}\right) r.$$

Resolent l'equació en la incògnita r:

$$r = \frac{9 - 2\sqrt{3}}{23} c.$$

438.- En un triangle equilàter s'han inscrit 5 triangles equilàters iguals (veure figura).
Calculeu la raó de proporcionalitat de l'àrea dels 5 triangles iguals i l'àrea del triangle equilàter exterior.



Solució:

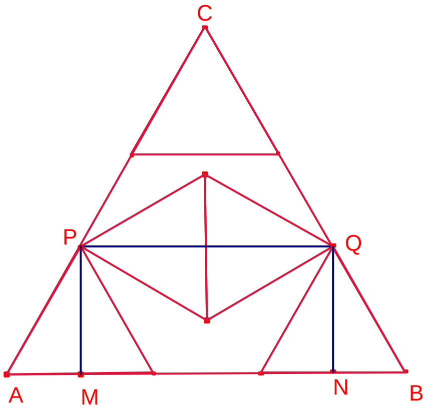
Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter exterior.

Siga $\overline{AP} = 1$ costat del triangle equilàter interior.

Siga $\overline{BQ} = 1$ costat del triangle equilàter interior.

$\overline{PQ} = \sqrt{3}$

Sigen M, N les projeccions de P i Q sobre el costat $\overline{AB}$, respectivament.



$\overline{AM} = \overline{BN} = \frac{1}{2}$.

Aleshores, $\overline{AB} = 1 + \sqrt{3}$, costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'àrea dels t triangles equilàters interiors és:

$$S_{5Tri} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AP}^2\right) = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

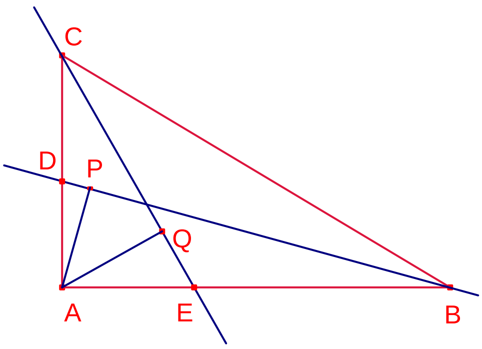
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4+2\sqrt{3}\right).$$

La proporció entre les àrees és:

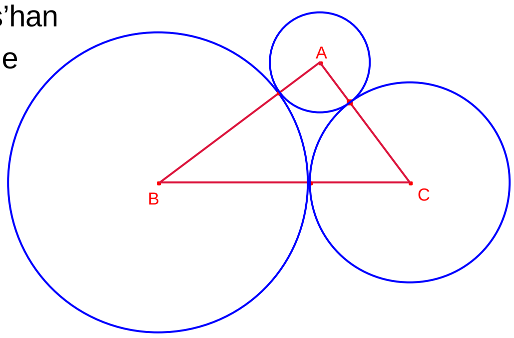
$$\frac{S_{5Tri}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4+2\sqrt{3}\right)} = \frac{5\left(4-2\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}.$$

439.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$.
Els peus de les perpendiculars del punt A a les bisectrius dels angles B, i C són P, Q, respectivament.
Determineu la mesura de l'angle $\angle PAQ$.
Crux Mathematicorum M483.

Solució:
Siguen les bisectrius BD, CE.
Siga $\alpha = \angle ABD = \angle DBC$.
Aleshores, $\angle ACE = \angle ECB = 45^{o} - \alpha$.
$\angle PAB = 90^{o} - \alpha$, aleshores, $\angle DAP = \alpha$
$\angle QAC = 90^{o} - (45^{o} - \alpha)$, aleshores, $\angle QAE = 45^{o} - \alpha$.
$\angle PAQ = 90^{o} - (\angle DAP + \angle QAE) = 90^{o} - (\alpha + 45^{o} - \alpha) = 45^{o}$.



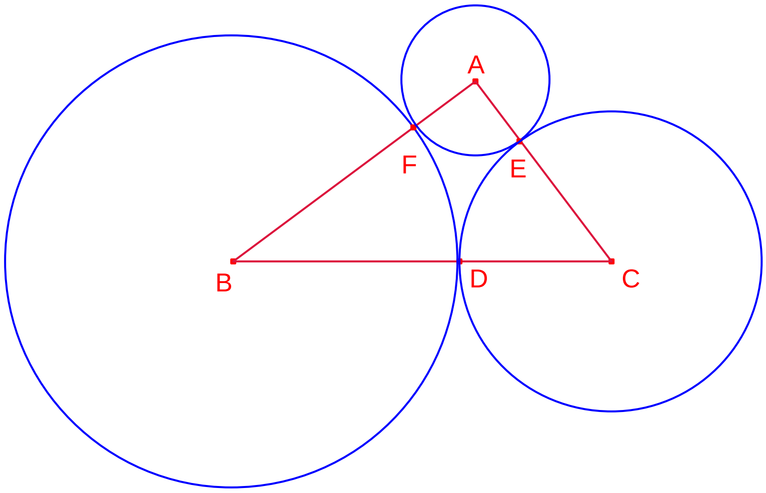
440.- Donat el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $a=5, b=3, c=4$, s'han dibuixat tres circumferències tangents exteriors dos a dos de centres els tres vèrtexs.
Calculeu la suma de les àrees dels tres cercles.



Solució:
Siguen D, E, F els punts de tangència de les tres circumferències.
Siguen $r=\overline{AF}=\overline{AE}$, $s=\overline{BF}=\overline{BD}$, $t=\overline{CD}=\overline{CE}$ el radi de les tres circumferències.

$\begin{cases} r+s=4 \\ r+t=3 \\ s+t=5 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} r=1 \\ s=3 \\ t=2 \end{cases}$.



La suma de les àrees dels tres cercles és:
$S=\pi\cdot 1^2+\pi\cdot 3^2+\pi\cdot 2^2=14\pi$.