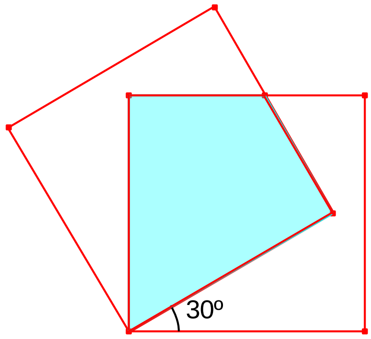
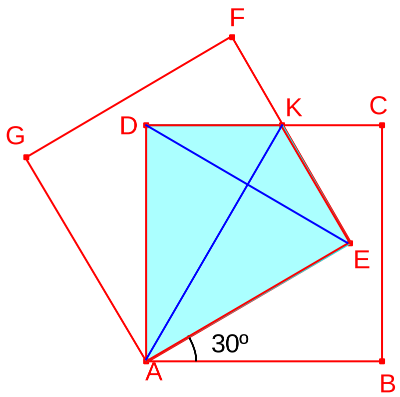
4401.- Els dos quadrats de la figura tenen costat 1.
Calculeu l'àrea comuna als dos quadrats.



Solució



AB=1

Els triangles AEK, ADK són iguals

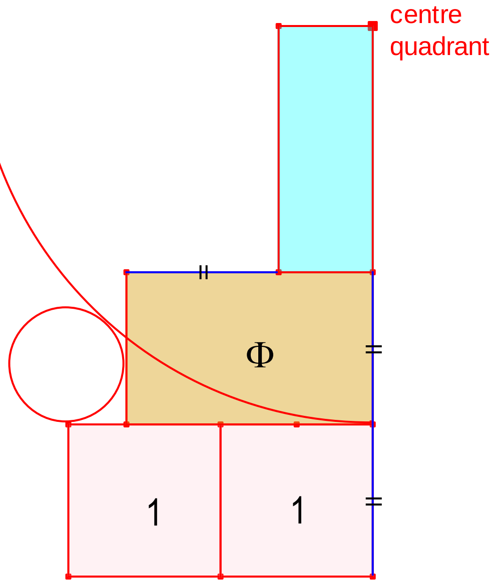
angleDAK=angleEAK=30º

EK=a, AK=2a, AE=1

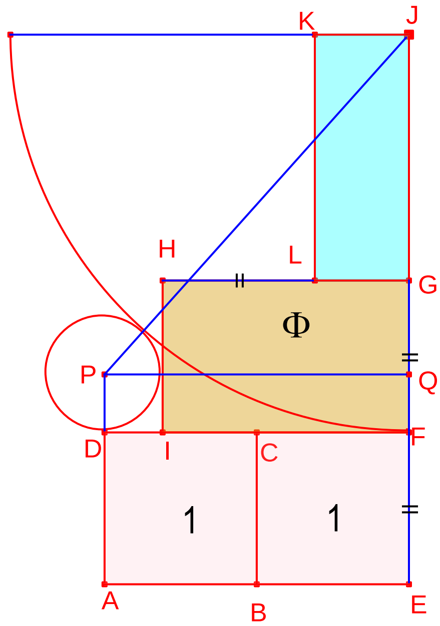
teorema Pitàgores AEK

[AEK]=(1/2)·AK·DE=sqrt(3)/6

4402.- La figura està formada per dos quadrats d'àrea 1, un rectangle d'àrea Φ un quadrant i un cercle tangent al quadrant i un rectangle blau.
Calculeu l'àrea del rectangle blau.

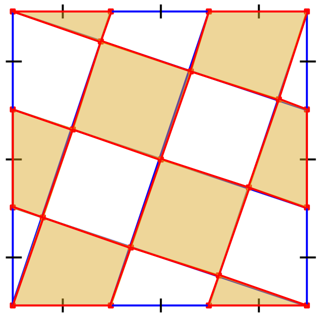


Solució:

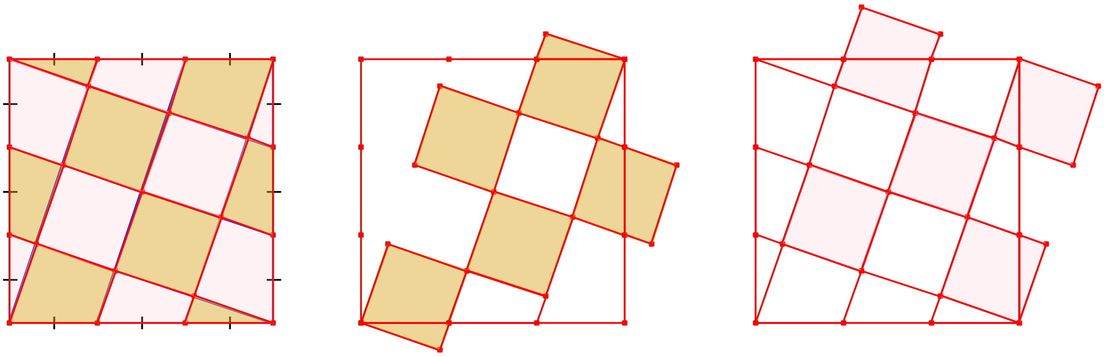


Siguen els quadrat $ABCD, BEFC$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el rectangle $FGHI$ de costats $\overline{FG} = 1, \overline{GH} = \Phi$
Siga el quadrant de centre J i radi $\overline{JF} = R$
Siga el rectangle $GJKL$ de costats $\overline{LG} = \Phi - 1, \overline{LG} = R - 1$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PD} = r$
$r = \overline{DI} = 2 - \Phi$
Siga Q la projecció de P sobre $\overline{FG}$
$\overline{JP} = R + r, \overline{PQ} = 2, \overline{JQ} = R - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQJ}$:
$(R + r)^2 = (R - r)^2 + 4$
Simplificant:
$rR = 1$
$(2 - \Phi)R = 1$
$$R = \frac{1}{2 - \Phi} = \Phi^2$$
L'àrea del rectangle $GJKL$ és:
$S_{GJKL} = (\Phi - 1)(\Phi^2 - 1) = (\Phi - 1)\Phi = 1$

4403.- Un quadrat es divideix per sis segment. Quina proporció del quadrat està ombrejada.



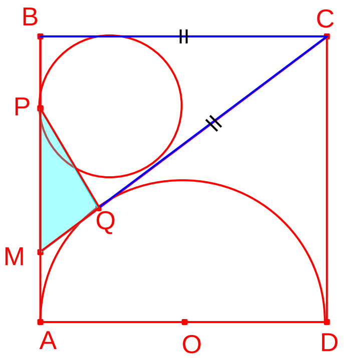
Solució:



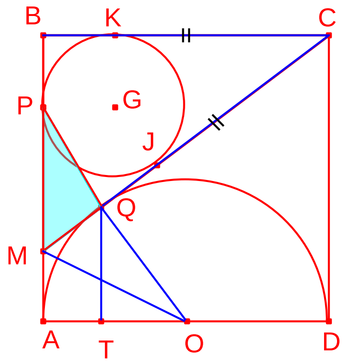
1 : 2

4404.- Sobre el costat $\overline{AB}$ quadrat $ABCD$ de la figura s'ha dibuixat una semicircumferència.
$\overline{CM}$ és tangent a la semicircumferència.

Si el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{MBC}$ és 60, calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MQP}$



Solució:
Siga $\overline{BK} = \overline{BP} = a, \overline{CK} = \overline{CJ} = b$
Siga $\overline{MA} = \overline{MC} = c$
$\overline{CB} = \overline{CQ}$
Aleshores, $\overline{QJ} = a$
$\overline{MP} = \overline{MJ} = a + c$



El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{MBC}$ és 60:
$6a + 6c = 60$
$a + c = 10$
$2a + 2c = a + b$
$b = 2c + a$

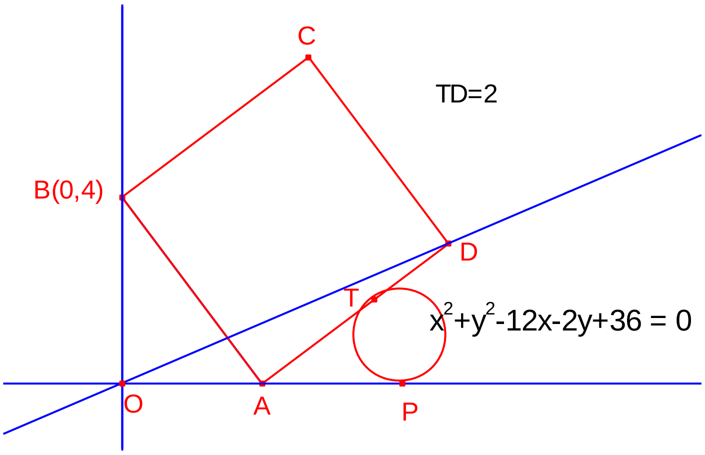
El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{MBC}$ és:
$\overline{GP} = a$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MBC}$ és
$$\frac{a \cdot 60}{2} = \frac{2(a+c)(2a+c)}{2}$$
$30a = 100(2a + c)$
Aleshores:
$a = c = 5$

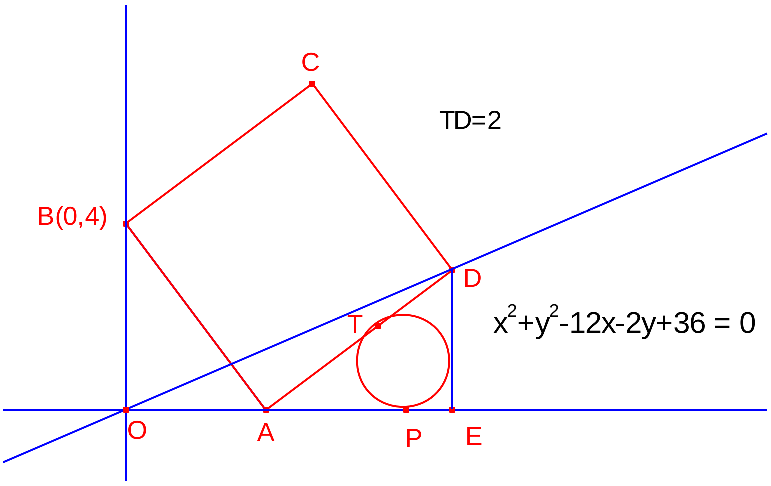
Siga $\alpha = \angle QOM = \angle AOM = \alpha$
$$\tan\alpha = \frac{1}{2}$$
Aleshores, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$
$$\frac{\overline{OT}}{10} = \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$
$\overline{OT} = 6, \overline{AT} = 10 - 6 = 4$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MQP}$ és:
$$S_{MQP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MP} \cdot \overline{AT} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

4405.- La figura està formada el quadrat $ABCD$ que té dos vèrtexs sobre els eixos coordenats. una circumferència d'equació $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 36 = 0$ que és tangent en els punts T, P.
Si $B(0,4)$ i $\overline{TD} = 2$
Calculeu l'equació de la recta OD.

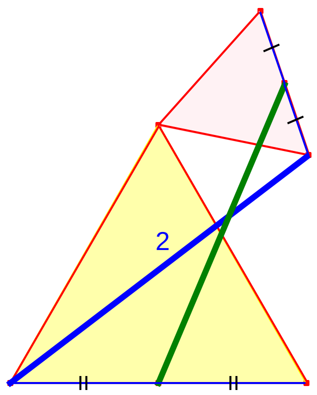


Solució:
Completant quadrats en l'equació de la circumferència:
$(x-6)^2 + (y-1)^2 = 1$
El centre té coodenades $K(6,1)$ i radi $\overline{KT} = 1$
Siga $A(a,0)$
$\overline{AT} = \overline{AP} = 6 - a$
$\overline{AD} = 8 - a$
$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + 16}$
$\sqrt{a^2 + 16} = 8 - a$
Resolent l'equació:
$a = 3$
Siga E la projecció de D sobre l'eix d'ascisses.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BOA}, \overset{\Delta}{DEA}$.
$\overline{DE} = 3, \overline{AE} = 3 + 4 = 7$
Les coordenades de D són: $D(7,3)$
L'equació de la recta que passa pels punts O, D és:
$y = \frac{3}{7}x$

4406.- La figura està formada per dos triangles equilàters.
El segment blau mesura 2.
Calculeu la mesura del segment verd.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 2a$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CDE}$ de costat $\overline{CD} = 2b$

$\overline{CM} = a\sqrt{3}, \overline{CN} = b\sqrt{3}$

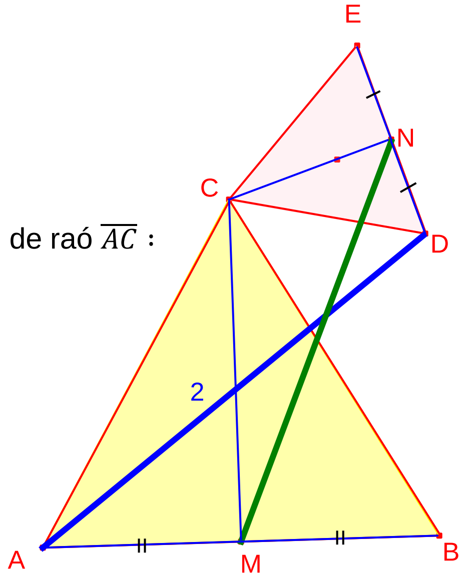
$\angle ACD = \angle MCN$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ACD}, \overset{\Delta}{MCN}$ són semblants i de raó $\overline{AC}$: $\overline{CM} = 2 : \sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Tales:

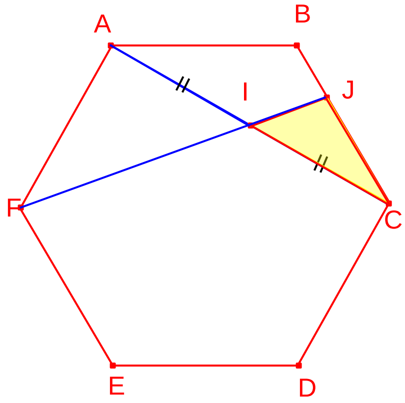
$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{3}$$

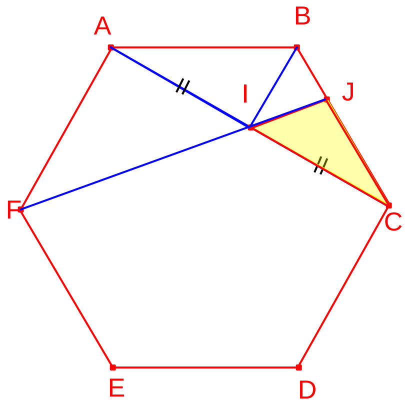


4407.- La figura està formada per l'hexàgon regular $ABCDEF$.

Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{IJC}$ i l'àrea de l'hexàgon regular.

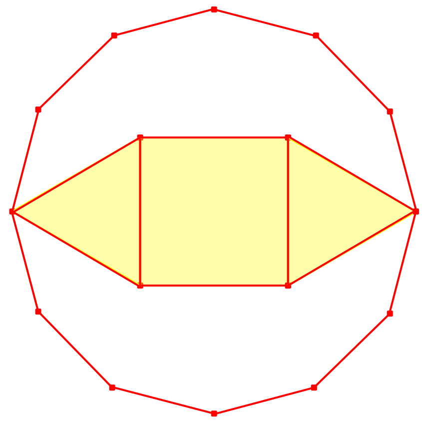


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga I el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$.



$$\overline{BI} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}$$
$$\overline{AI} = \overline{CI} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FAI}$:
$$\overline{FI} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$
Siga $\alpha = \angle AFI$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$$
Siga $a = \overline{IJ}$
Aplicant el teorema dels sinus a triangle $\overset{\Delta}{IJB}$:
$$\frac{a}{\sin 60°} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin(\alpha + 60°)}$$
$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{6}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{IJC}$ és:
$$S_{IJC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{IJ} \cdot \overline{IC} \cdot \sin(90° - \alpha) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$
L'àrea de l\`hexàgon regular $ABCDEF$ és:
$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{IJC}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{18}$$

4408.- Dins d'un dodecàgon regular s'han dibuixat dos triangles equilàters i un quadrat.
Calculeu la proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea del dodecàgon regular.

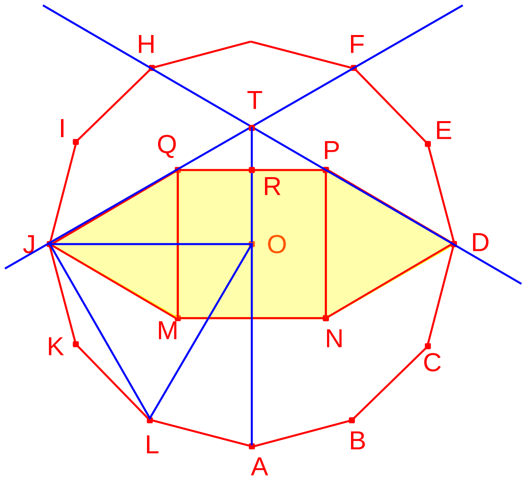


Solució:
çSiga el dodecàgon regular $ABCDEFGHIJKL$ de centre O
Siga el quadrat $MNPQ$ de costat $\overline{MN} = c$
J, Q, F estan alineats.
$D, P\ H$ estan alineats.
Siga T la intersecció de les rectes JQ, DP.
El triangle $\overset{\Delta}{LOJ}$ és equilàter.

$$\overline{QT} = \frac{\sqrt{3}}{3}c, \overline{TR} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$$

$$\overline{JT} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)c$$

$$\overline{OJ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{JQ} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$



L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{JMQ} + S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 + c^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}c^2$$

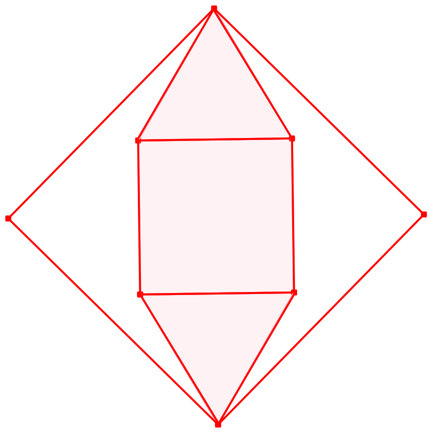
L'àrea del dodecàgon regular és:

$$S_{ABCDEFGHIJKL} = 12 \cdot S_{LAO} = 12 \cdot \frac{1}{2}\overline{OA}^2 \sin 30° = \frac{3}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)C^2$$

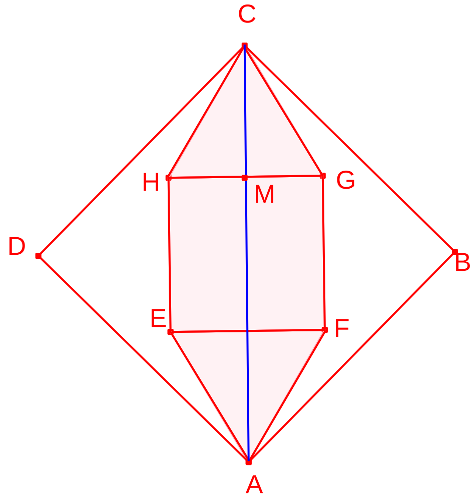
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDEFGHIJKL}} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}c^2}{\frac{3}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)C^2} = \frac{1}{3}$$

4409.- Dins d'un quadrat s'han dibuixat dos triangles equilàters i un quadrat.
Calculeu la proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.

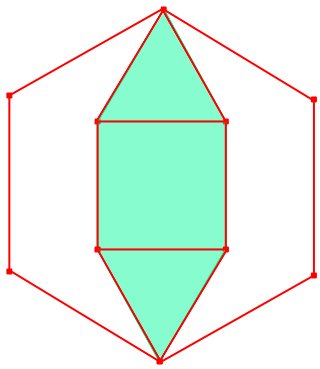


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{AC} = c\sqrt{2}$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = d$
Siga M el punt mig del costat $\overline{GH}$

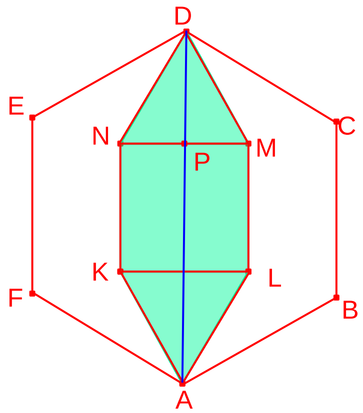


$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$$
$$\overline{AC} = \left(1 + \sqrt{3}\right)d$$
$$c\sqrt{2} = \left(1 + \sqrt{3}\right)d$$
Elevant al quadrat:
$$c^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)d^2$$
$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{CHG} + S_{EFGH} = \frac{\sqrt{3}}{2}d^2 + d^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}d^2$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}d^2}{c^2} = \frac{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}d^2}{\left(2 + \sqrt{3}\right)d^2} = \frac{1}{2}$$

4410.- Dins d'un hexàgon regular s'ha dibuixat dos triangles equilàters i un quadrat.
Calculeu la proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea del hexàgon regular.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{AD} = 2c$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = d$
Siga P el punt mig del costat $\overline{MN}$



$\overline{DP} = \frac{\sqrt{3}}{2} d$
$\overline{AC} = \left(1 + \sqrt{3}\right) d$
$2c = \left(1 + \sqrt{3}\right) d$
Elevant al quadrat:
$$c^2 = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) d^2$$
$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{CHG} + S_{EFGH} = \frac{\sqrt{3}}{2} d^2 + d^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} d^2$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2} d^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2} c^2} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2} d^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) d^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$