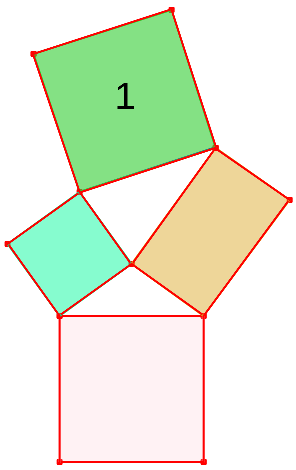
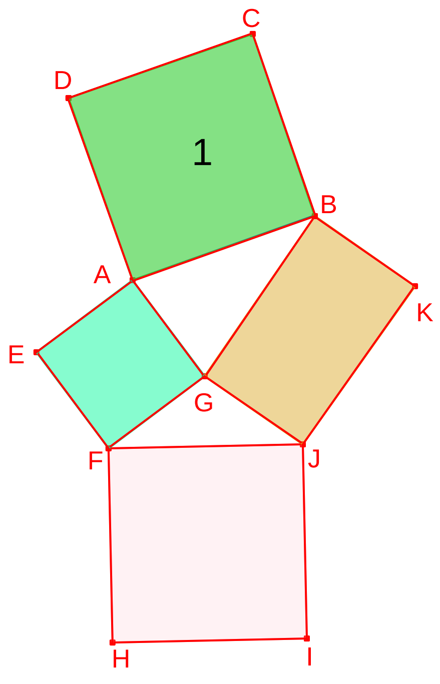
4411.- La figura està formada per tres quadrats (un d'ells àrea 1) dos triangles isòsceles i un rectangle auri.
Calculeu el total d'àrea ombrejada.



Solució:



AB=BG=1

GJKB auri

GJ=1/Φ

GF=GJ

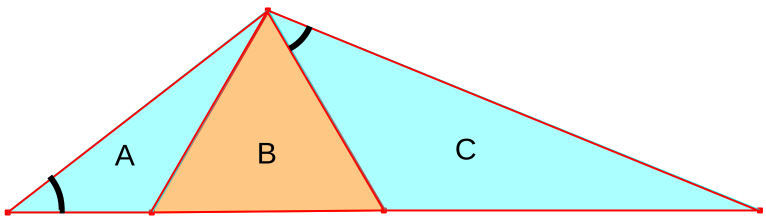
angleABG=36º

angleEGJ=108º

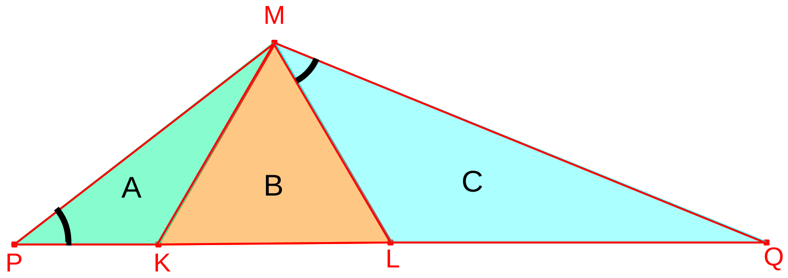
FJ=GJ·Φ =1

[Total]=1+(1/Φ^2)+1/Φ +1=3

4412.- Un triangle té un triangle equilàter inscrit.
Si les àrees $A+B=C$, calculeu les proporcions $A:B:C$



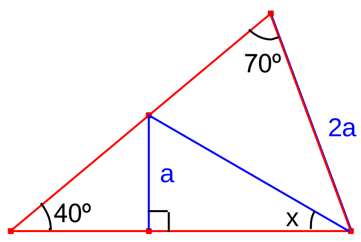
Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ de costat $\overline{KL}=c$
$A+B=C$, siga $\overline{QL}=\overline{PL}=a$
Els triangles $\overset{\Delta}{PKM}, \overset{\Delta}{MLQ}$ són semblants.
$$\frac{a-c}{c}=\frac{c}{a}$$
Resolent l'equació:
$$\frac{c}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{\Phi}$$
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les base:
$$\frac{A}{B}=\frac{a-c}{c}=\Phi-1=\frac{1}{\Phi}$$
$$\frac{A}{C}=\frac{a-c}{a}=1-\frac{1}{\Phi}=\frac{1}{\Phi^2}$$

$A:B:C=1:\Phi:\Phi^2$

4413.- En el triangle de la figura calculeu la mesura de l'angle x



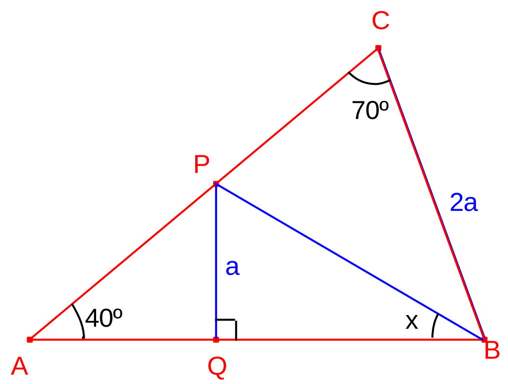
Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, A = 40°, B = C = 70°, \overline{BC} = 2a$

siga $\overline{BQ} = b$

$\sin x = \frac{a}{b}$

$\angle BPC = 40° + x$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCP}$

$$\frac{b}{\sin 70°} = \frac{2a}{\sin(40° + x)}$$

$$\frac{1}{\sin 70°} = \frac{2 \cdot \sin x}{\sin(40° + x)}$$

$\sin(40° + x) = 2 \cdot \sin x \cdot \sin 70°$

$\sin(40° + x) = \cos(x - 70°) - \cos(x + 70°$

$\cos(50° - x) - \cos(x + 70°) = \cos(x - 70°$

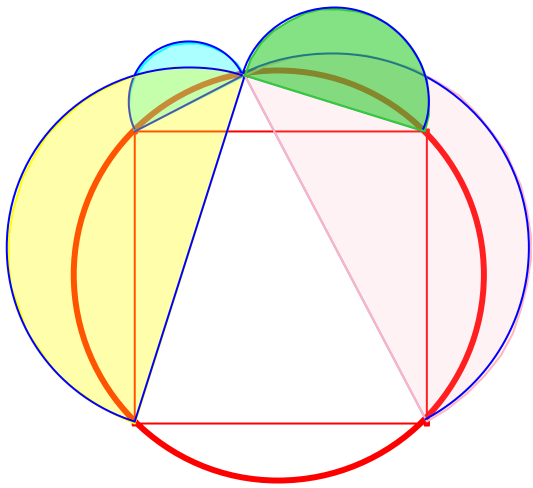
$2 \cdot \cos 60° \cdot \cos(x + 10°) = \cos(x - 70°)$

$\cos(x + 10°) = \cos(x - 70)$

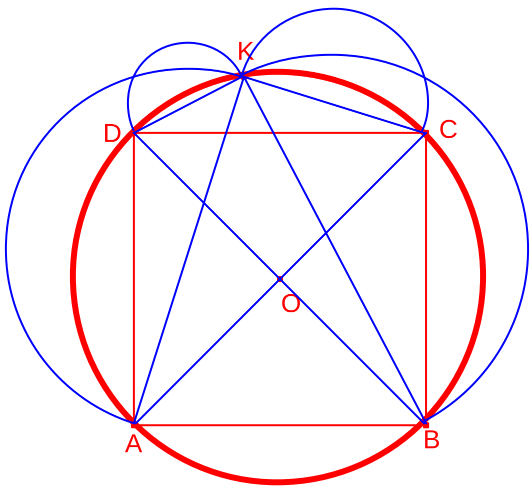
$x + 10° = -x + 70°$

$x = 30°$

4414.- La figura està formada per un cercle d'àrea unitària que té inscrit un quadrat. S'han dibuixat quatre semicercles. Calculeu la suma de les àrees dels semicercles.

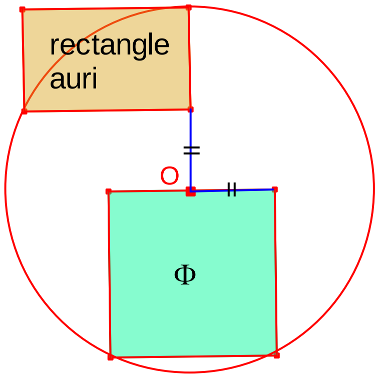


Solució:

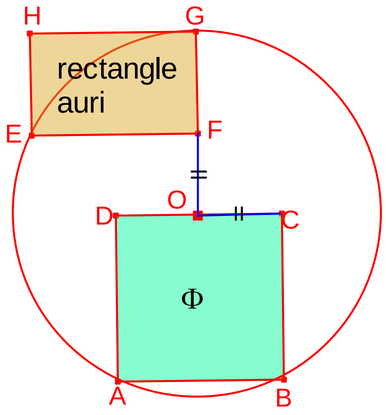


Siga el quadrat $ABCD$ inscrit en la circumferència de centre O i radi 1.
Siga $\overline{OD} = r$, radi del cercle.
$\pi r^2 = 1$
Siguen $\overline{KD} = a, \overline{KA} = b, \overline{KB} = c, \overline{KC} = d$ diàmetres dels semicercles.
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $D\overset{\Delta}{K}B, A\overset{\Delta}{K}C$:
$4r^2 = a^2 + c^2$
$4r^2 = b^2 + d^2$
Sumant ambdues expressions:
$8r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
La suma de les àrees dels quadrat semicercles és:
$$S = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}\right) = \pi r^2 = 1$$

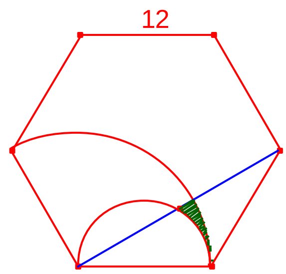
4415.- La figura està formada per una circumferència un quadrat d'àrea Φ i un rectangle auri.
Calculeu l'àrea del rectangle auri.

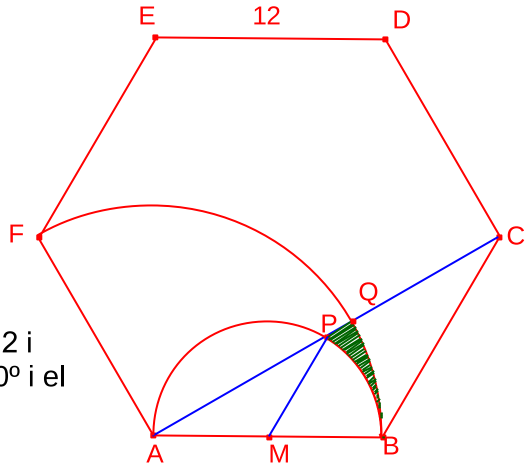


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2a$
$4a^2 = \Phi$
Siga $\overline{OC} = \overline{OF} = a$
Siga el rectangle auri de costats $\overline{FG} = b, \overline{EF} = b \cdot \Phi$
$\overline{OE} = a + b$
aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFO}$:
$(a+b)^2 = a^2 + (1+\Phi)b^2$
$b = \dfrac{2a}{\Phi}$
L'àrea del rectangle $EFGH$ és:
$S_{EFGH} = b \cdot \Phi b = \Phi \dfrac{4a^2}{\Phi^2} = 1$



4416.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 12 un diagonal, un semicercle sobre un costat i un sector.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



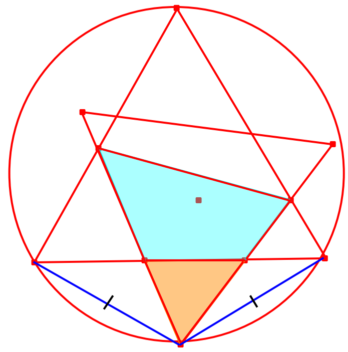


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 12$
$\angle CAB = 30°$

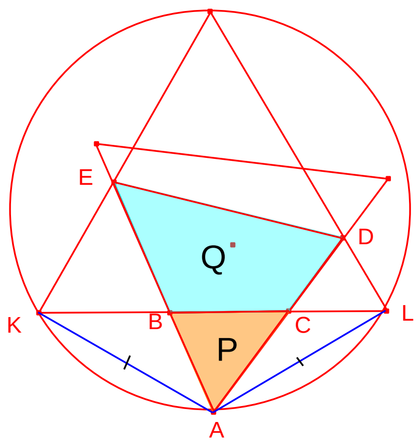
La zona ombrejada és igual a l'àrea del sector de radi 12 i 30º menys la suma de les àrees del sector de radi 6 i 60º i el triangle $\overset{\Delta}{AMP}$:

$$S_{ombrejada} = \frac{1}{12}\pi \cdot 12^2 - \left(\frac{1}{12}\pi \cdot 12^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}6^2\right) = 6\pi - 9\sqrt{3} \approx 3.2611$$

4417.- En la figura, la circumferència conté un triangle isòsceles i dos equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea taronja i l'àrea blava.



Solució:



AK=AL=1
AB=a, AC=b
angleDAL=x
teorema sinus ABK, ACL

a=1/(2·cos x), b=1/(2·sin(x+30º)

[P]=(1/2)ab·sin60º=(sqrt(3)/16)·(1/(cos x·sin(30º+x)))

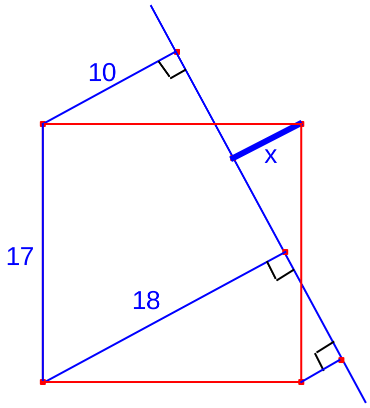
AE=c, AD=d
angleEKA=angleDLA=90º
c=1/sin(30º+x), d=1/cos x

[P]+[Q]=(1/2)cd·sin 60º=(sqrt(3)/4)·(1/(cos x·sin(30º+x)))

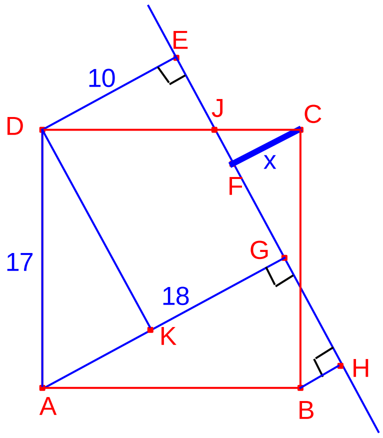
[P]+[Q]=4[P]

[P]/[Q]=1/3

4418.- La figura està formada per un quadrat de costat 17, una recta i quatre segments perpendiculars a la recta.
Determineu la mesura del segment x



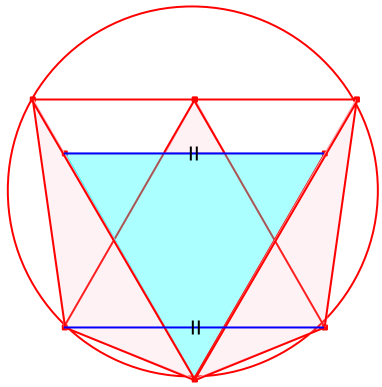
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 17$
siga K la projecció de D sobre el segment $\overline{AG} = 18$
$\overline{AK} = 8$



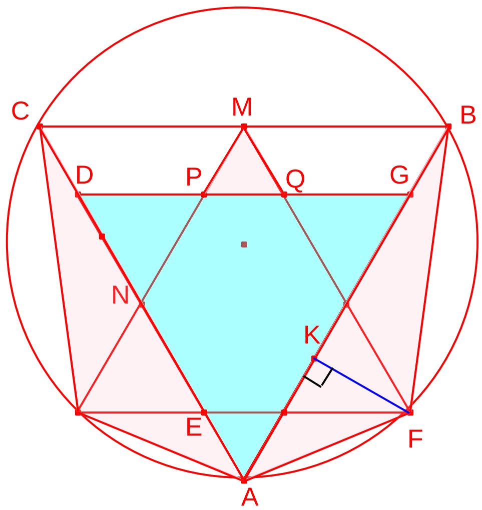
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKD}$:
$\overline{DK} = 15$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKD}, \overset{\Delta}{JED}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{DJ}}{17} = \frac{10}{15}$$
$$\overline{DJ} = \frac{34}{3}$$
$$\overline{JC} = 17 - \frac{34}{3} = \frac{17}{3}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKD}, \overset{\Delta}{JFC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{15} = \frac{\frac{17}{3}}{17}$$
$$x = 5$$

4419.- La figura està formada per una circumferència que té inscrit un triangle equilàter i altres dos triangles equilàters iguals.
Calculeu la proporció entre l’àrea blava i l’àrea rosa.



Solució:



$BC=2$

$MP=AE=x$

$DN=EN=1-x$

$AD=2-x$

$[AGD]=(2-x)^2\cdot sqrt(3)/4$

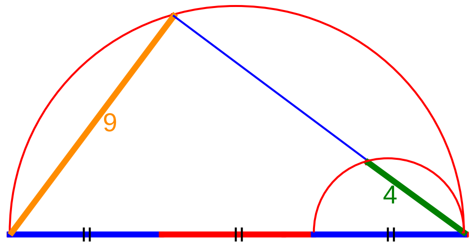
$KF=(1-x)\cdot sqrt(3)/2$

$[AFB]=(1/2)2(1-x)sqrt(3)/2$

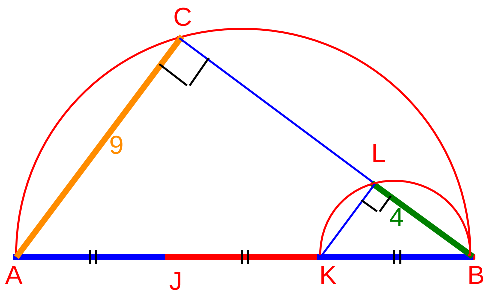
$[rosa]=2\cdot[AFB]+[PQM]=(1-x)\cdot sqrt(3)+x^2\cdot sqrt(3)/4=(2-x)^2\cdot sqrt(3)/4$

$[AGD]=[rosa]$

4420.- La figura està formada per dos semicercles.
El diàmetre gran s’ha dividit en tres segments iguals.
Calculeu la mesura dels tres segments iguals.



Solució:



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KBL}$ són semblants i de raó $3 : 1$
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{KL} = \frac{1}{3}\overline{AC} = 3$
aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLB}$:
$\overline{KB} = \overline{JK} = \overline{AJ} = 5$