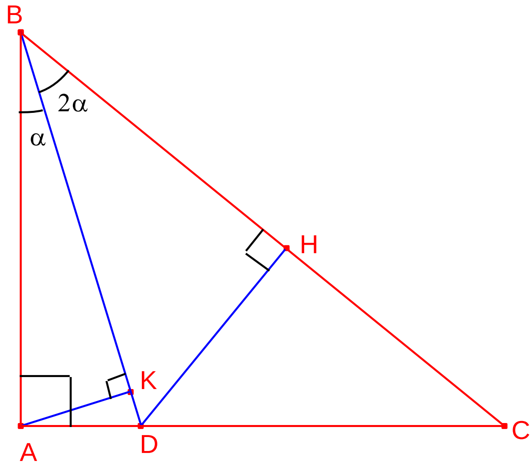
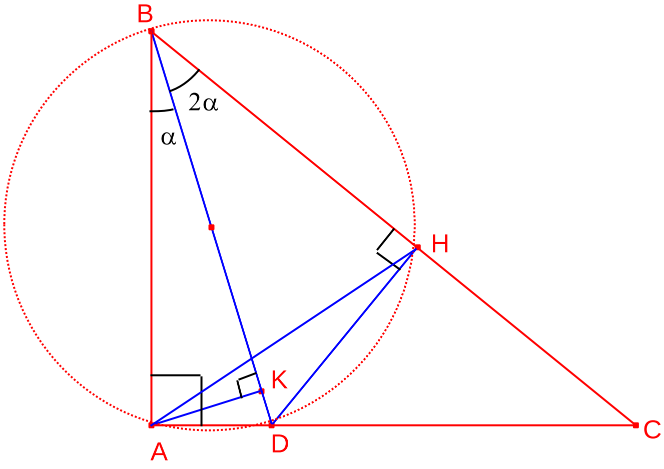
4421.- En la figura, calculeu la proporció:
$\frac{\overline{AK}}{\overline{DH}}$



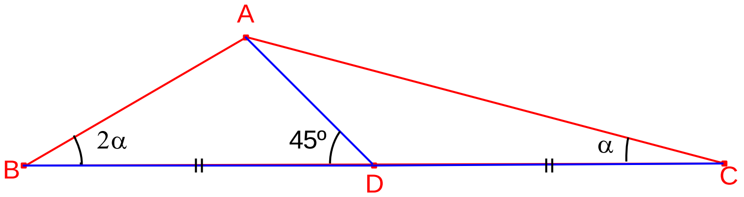
Solució:
El quadrilàter $ADHB$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
$\angle KAD = \alpha$
$\angle HAD = \angle HBD = 2\alpha$

$\frac{\overline{AK}}{\overline{AD}} = \cos\alpha$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADH}$:
$\frac{\overline{DH}}{\sin 2\alpha} = \frac{\overline{AD}}{\sin\alpha}$
$\frac{\overline{DH}}{\overline{AD}} = 2 \cdot \cos\alpha$
Dividint les dues expressions:
$\frac{\overline{AK}}{\overline{DH}} = \frac{1}{2}$

4422.- En el triangle de la figura, calculeu la mesura de l'angle α



Solució 1:

Siga $\overline{BD} = \overline{CD} = \frac{a}{2}, \overline{AD} = m$

Aplicant el teorema dels sinus als triangles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{ADC}$:

$$\frac{m}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{2 \cdot \sin(45° + 2\alpha)}$$

$$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{a}{2 \cdot \sin(45° + \alpha)}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\sin \alpha \cdot \sin(45° + 2\alpha) = \sin 2\alpha \cdot \sin(45° - \alpha)$$

$$\cos(45 + \alpha) - \cos(45° + 3\alpha) = \cos(3\alpha - 45°) - \cos(45° + \alpha)$$

$$2 \cdot \cos(45° + \alpha) = \cos(3\alpha - 45°) + \cos(3\alpha + 45°)$$

$$2 \cdot \cos(45° + \alpha) = 2 \cdot \sin 3\alpha \cdot \sin -45°$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = -\sin 3\alpha$$

$$\cos \alpha = \sin 3\alpha + \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha$$

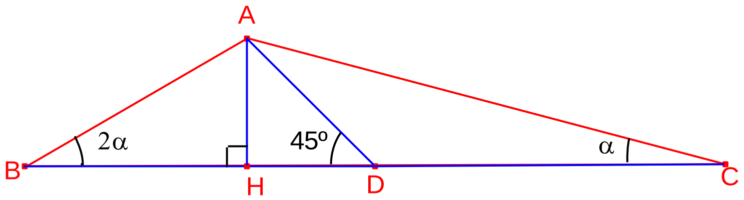
$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha = 30°$$

$$\alpha = 15°$$

Solució 2:

Siga $\overline{BD} = \overline{CD} = \frac{a}{2}, \overline{AH} = \overline{DH} = h$



$$\tan 2\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2} - h} = \frac{2h}{a - 2h}$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{\frac{a}{2} + h} = \frac{2h}{a + 2h}$$

$$\frac{2h}{a - 2h} = \frac{2 \cdot \frac{2h}{a + 2h}}{1 - \left(\frac{2h}{a + 2h}\right)^2}$$

$$\frac{1}{a - 2h} = \frac{2(a + 2h)}{a^2 + 4ah}$$

$$8h^2 + 4ah - a^2 = 0$$

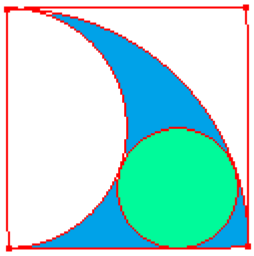
$$\frac{h}{a} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}, \qquad \frac{a}{2} - h = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} a$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2h}{a - 2h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

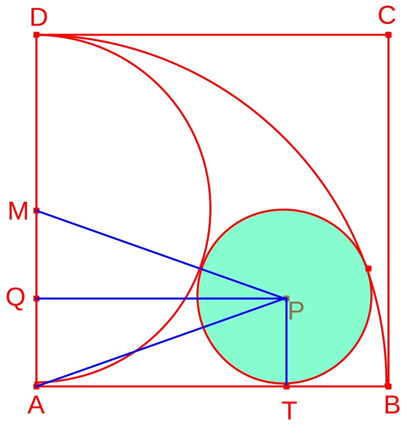
$$2\alpha = 30°$$

$$\alpha = 15°$$

4423.- La figura està formada per un quadrat que conté un quadrant un semicercle i un cercle.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea blava.



Solució:



AB=2

PT=r

AM=2-r, MP=1+r, MQ=1-r

Teorema Pitàgores MQP, AQP

$(1+r)^2-(1-r)^2=(2-r)^2-r^2$

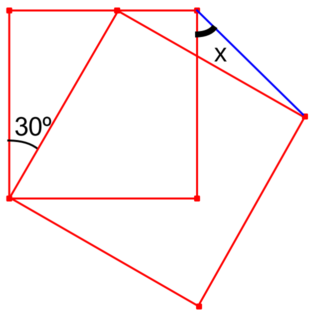
r=1/2

[verda]=Pi/4

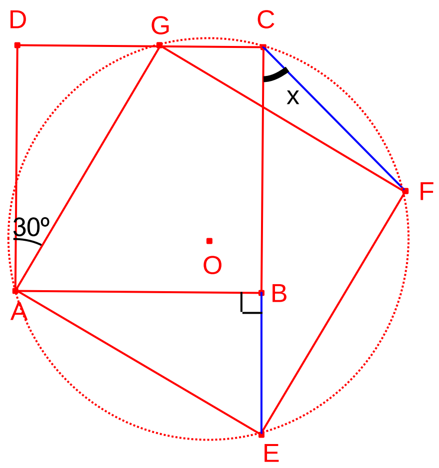
[blava]=Pi-(Pi/2+Pi/4)=Pi/4

[verda]/[blava]=1

4424.- La figura està formada per dos quadrats amb un vèrtex comú.
Determineu la mesura de l'angle x



Solució:



DAG i ABE iguals
D, B, E alineats

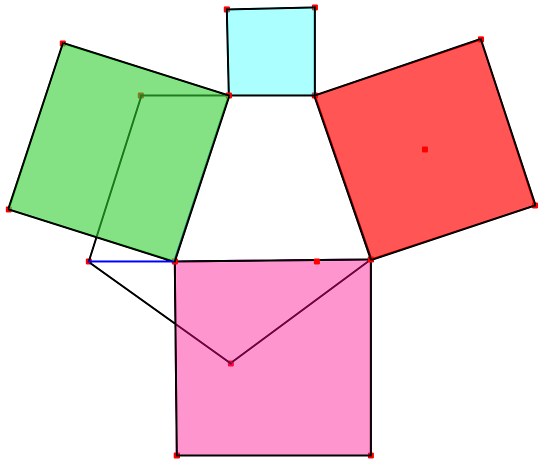
angleBAE=30º
angleCEF=30º
angleCGF=30º

G, E, F, C cíclic

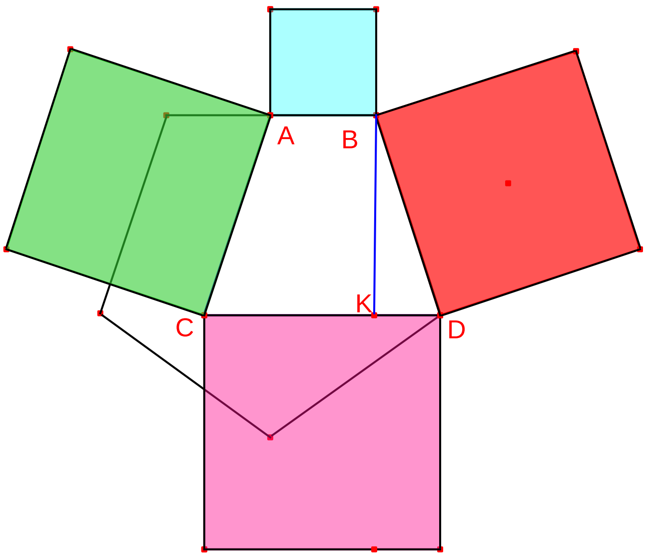
AEFCG cíclic de centre O

x=(1/2)angleEOF=90º/2=45º

4425.- La figura està formada per un pentàgon regular i quatre quadrats.
L'àrea verda és igual a l'àrea roja.
L'àrea morada és igual a la suma de la blava i la roja.
Calculeu la proporció entre l'àrea roja i l'àrea blava.



Solució:



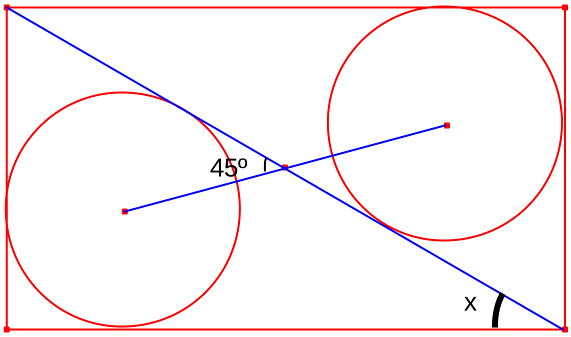
$BD=AC=1$
$AB=a$
$CD=b$
CDBA un trapezi

$a^2+1^2=b^2$
angleKBD=1
$KD=(b-a)/2$
sin18º=(b-a)/2=(phi-1)/2

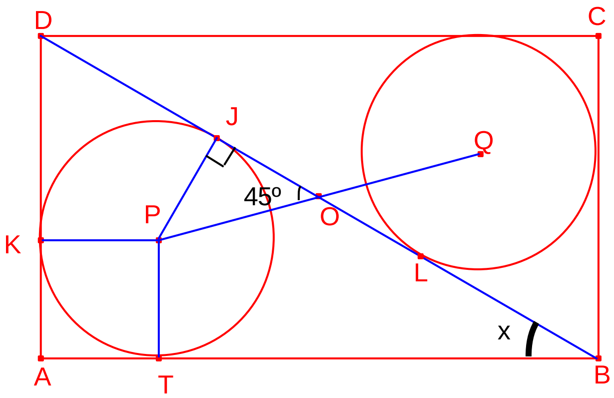
$a=1/2$

[red]/[blue]=$1^2/a^2=4$

4426.- La figura està formada per un rectangle, una diagonal i dues circumferències inscrites.
Calculeu la mesura de l'angle x



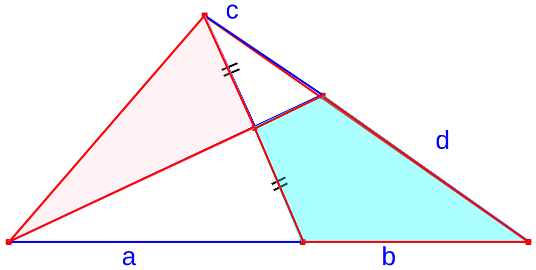
Solució:



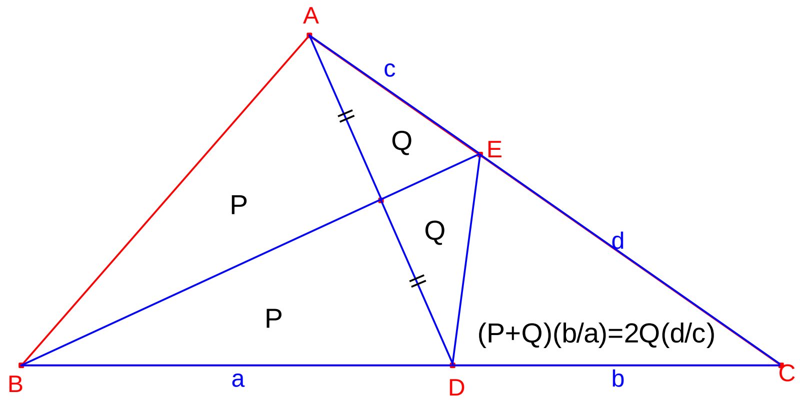
Siga PT=PJ=AK=r
OJ=OL=r
DK=DJ=BL=a
AD=a+r
BD=2(a+r)
sin x = 1/2
x=30º

4427.- En la figura, dins del triangle s'han dibuixat dues cevianes.
Calculeu:

$$\frac{d}{c}-\frac{b}{a}$$



Solució:



(P+Q)(b/a)=2Q(d/c)

[BCE]=(d/c)·[ABE]

(P+Q)(1+b/a)=(P+Q)(d/c)

d/c-b/a=1

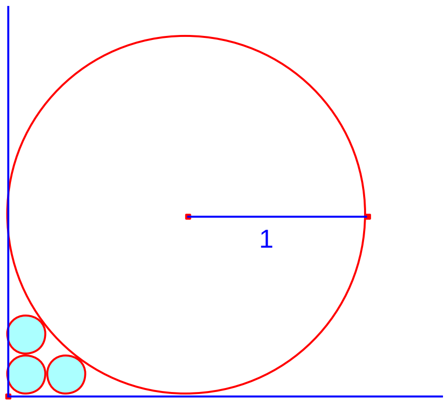
4428.- Sobre una taula hi ha dodecàedres i icosàedres.
Els sòlids tenen 792 vèrtex i 936 cares.
Determineu quants dodecàedres i quants icosàedres hi ha a la taula.
KöMaL, K710, desembre 2021

Solució:
La fórmula d'Euler de políedres:
$C + V = A + 2$
El dodecàedre té $C_{12} = 12$ cares, $A_{12} = \frac{1}{2}(C_{12} \cdot 5) = 30$ arestes.
$V_{12} = 30 + 2 - 12 = 20$
L'icosàedre té $C_{20} = 20$ cares, $A_{20} = \frac{1}{2}(C_{20} \cdot 3) = 30$
$V_{20} = 30 + 2 - 20 = 12$

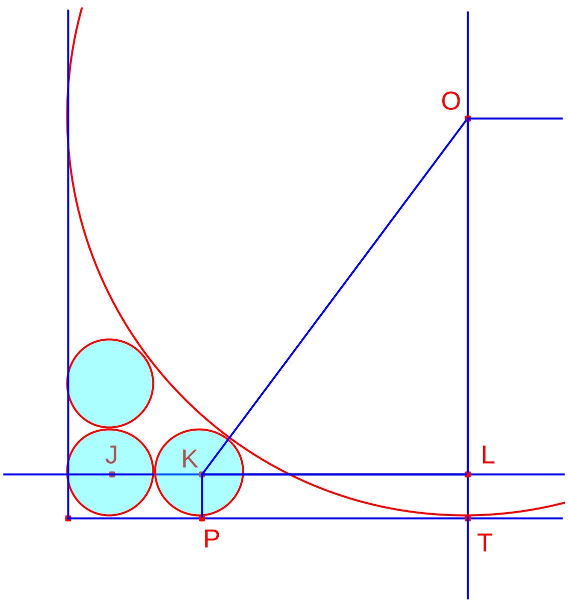
Siga $n = nombre\ de\ dodecàedres, m = nombre\ d'icosàedres$
El nombre total de cares és 936:
$12n + 20m = 936$
$3n + 5m = 234$
El nombre total de vèrtexs és 792:
$20n + 12m = 792$
$5n + 3m = 198$
Considerem el sistema:
$\begin{cases} 3n + 5m = 234 \\ 5n + 3n = 198 \end{cases}$
Resolent el sistema:
$\begin{cases} n = 18 \\ m = 36 \end{cases}$

A la taula hi ha 18 dodecàedres i 36 icosàedres.

4429.- La figura està formada per dues semirectes perpendiculars, una circumferència de radi 1 tangent a les semirectes i tres circumferències ombrejades iguals
Calculeu el radi d'aquestes circumferències.



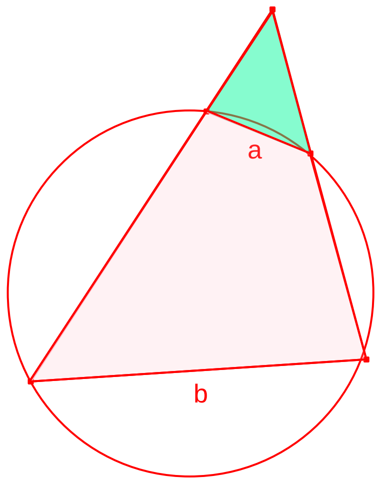
Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = 1$
Siga la circumferència de centre K i radi $\overline{KP} = r$
Siga L la intersecció de OT i JK
$\overline{KL} = 1 - 3r, \overline{OK} = 1 + r, \overline{OL} = 1 - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLO}$:
$(1 + r)^2 = (1 - r)^2 + (1 - 3r)^2$
$9r^2 - 10r + 1 = 0$
$r = \frac{1}{9}$



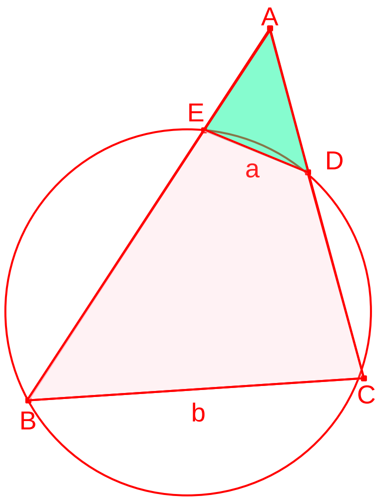
4430.- La figura està formada per una circumferència i un triangle.
Les cordes a, b compleixen:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$$

Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea rosa.



Solució:



DE=a, BC=b
a/b=1/3

Els triangles ABC, ADE són semblants de raó 3 : 1

[AED]/[ABC]=1/9

[AED]/[BCDE]=1/8