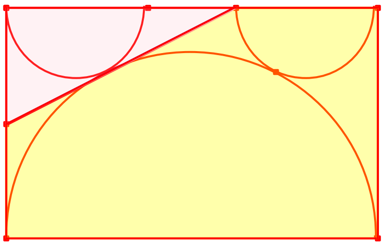
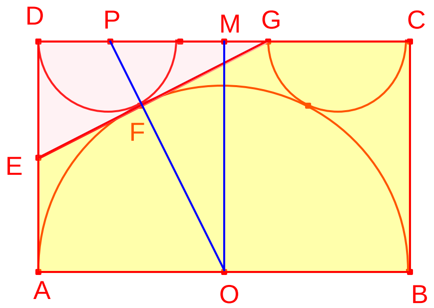
4431.- La figura està formada un rectangle que conté tres semicircumferències i un segment tangent a dues semicircumferències.
Si l'àrea lila és 1, calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:



AB=2R, PD=r

DG=2(R-r)

EA=EF=ED=a

[EDG]=1

a(R-r)=1

els triangles EDG, PMO semblants

Teorema de Tales:

a/(R-r)=(R-r)/a

a=R-r

a=R-r=1

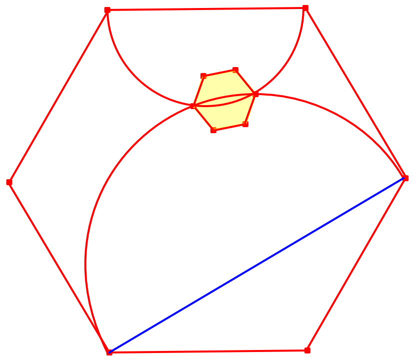
Teorema Pitàgores PMO

$4Rr=a^2$

R=(1+sqrt(5))/2=Φ

[ABCD]=4aR=4Φ

4432.- La figura està formada per dos hexàgons regulars i dues semicircumferències.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos hexàgons regulars.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$

$\overline{NE} = \overline{NQ} = 1$

$\overline{AC} = 2\sqrt{3}, \overline{JC} = \sqrt{3}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{NDC}$:

$$\overline{CN}^2 = 1 + 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2\frac{1}{2}$$

$$\overline{CN} = \sqrt{7}$$

Siga $\alpha = \angle DCN$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{NDC}$:

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{JCN}$:

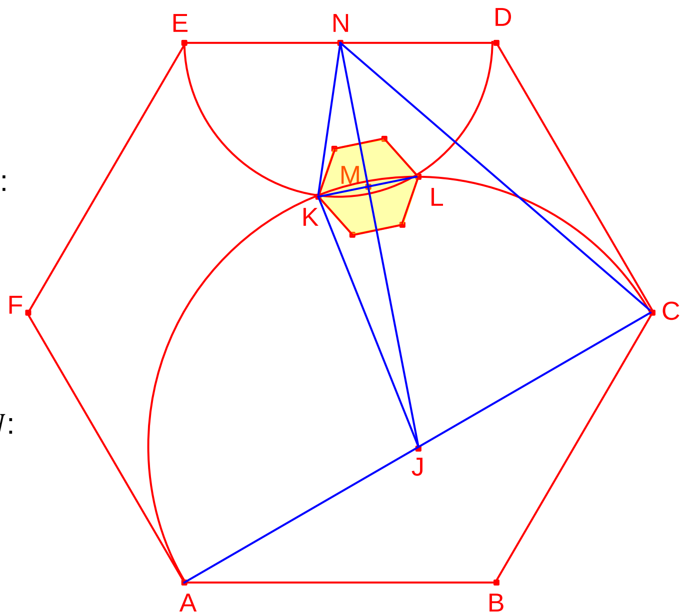
$$\overline{JN}^2 = 7 + 3 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = 7$$

$$\overline{JN} = \sqrt{7}$$

Siga M el punt mig del segment $\overline{KL}$.

Siga $\overline{KM} = a$

Siga $\overline{KM} = x, \overline{JM} = \sqrt{7} - x$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{KMN}, \overset{\Delta}{KMJ}$:

$$a^2 = 1 - x^2 = 3 - \left(\sqrt{7} - x\right)^2$$

Resolent l'equació:

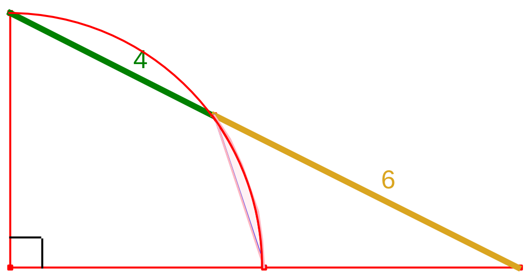
$$x = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$$a^2 = \frac{3}{28}$$

La proporció de les àrees dels dos hexàgons regulars és:

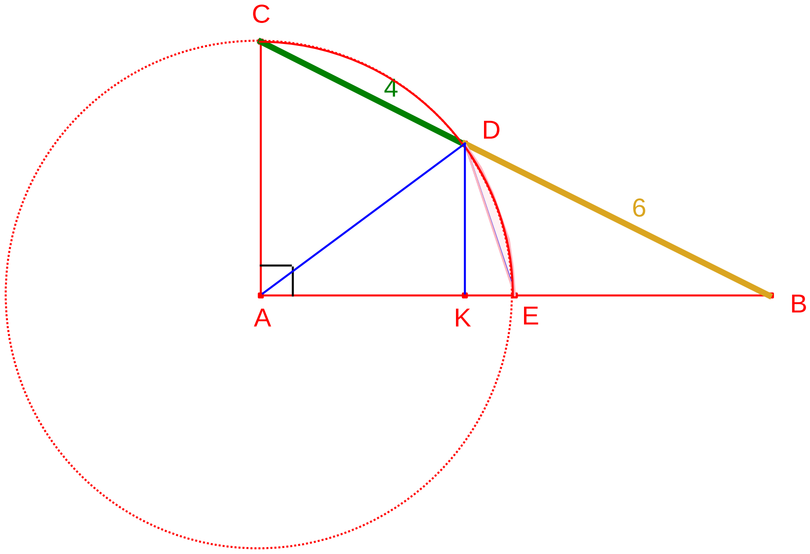
$$\frac{S_{groc}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{\overline{KM}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{3}{112}$$

4433.- La figura està formada per un triangle rectangle i un quadrant.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

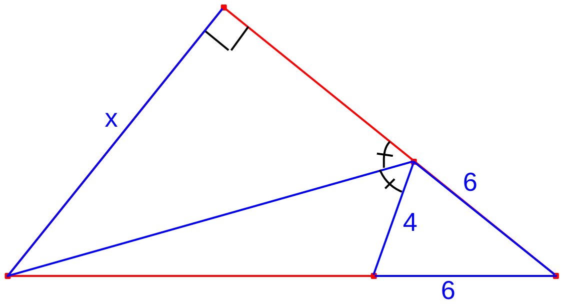
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga $\overline{AC} = b, \overline{AE} = x$
Aplicant la potència de B respecte de la circumferència:
$x(x + 2b) = 6 \cdot 10$
$x^2 + 2bx = 60$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$(x + b)^2 + b^2 = 100$
$x^2 + 2bx + 2b^2 = 100$
$60 + 2b^2 = 100$
$b = 2\sqrt{5}$
$\overline{AB} = 4\sqrt{5}$
Siga K la projecció de D sobre $\overline{AB}$
Siga $\overline{DK} = y$



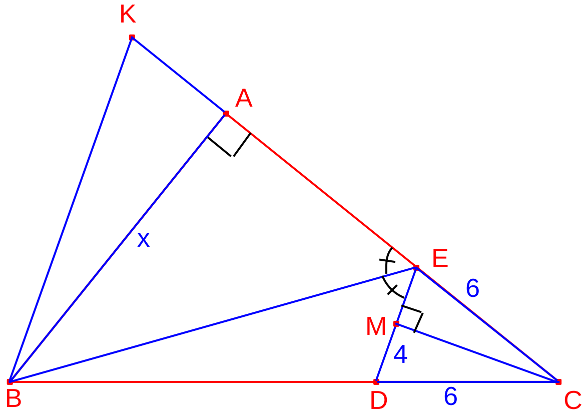
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KBD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{y}{6}$$
$$y = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{AK} = 4\sqrt{5} - \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$
Siga $\alpha = \angle DAK$
$$\tan\alpha = \frac{y}{\overline{AK}} = \frac{3}{4}$$
L'àrea del segment circular ombrejat és:
$$S_{ombrejada} = \frac{\arctan\frac{3}{4}}{2}\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = 10 \cdot \arctan\frac{3}{4} - \frac{24}{5} \approx 1.6350$$

4434.- La figura està formada per un triangle que conté un triangle de costats 4, 6, 6.
Calculeu la mesura del costat x



Solució:



CM=4·sqrt(2)

angleECM=a

angleAEB=angleBED=45º+a/2

BK paral·lel DE

angleKBA=a

angleKBE=angleBEK=45+a/2

AB=KE=BD=b

DCE, BCK semblants

b/4=(b+6)/6

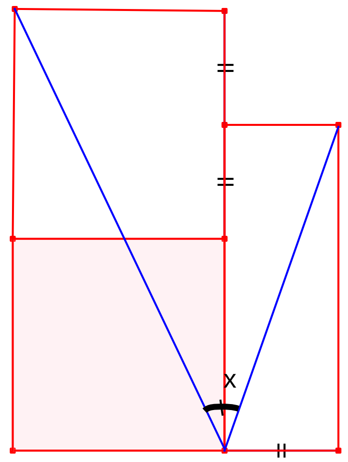
b=12

CME, AMK semblants

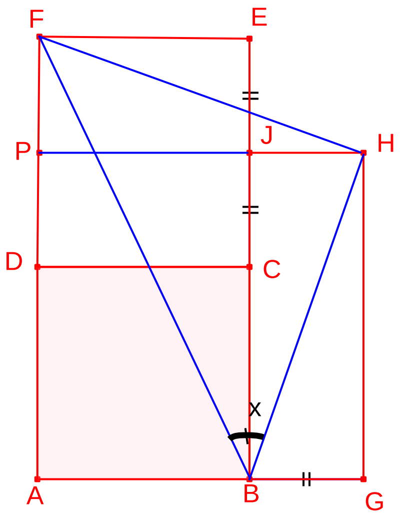
x/(4·sqrt(2))=12/6

x=8·sqrt(2)

4435.- La figura està formada per un quadrat ombrejat i dos rectangles.
Determineu la mesura de l'angle x



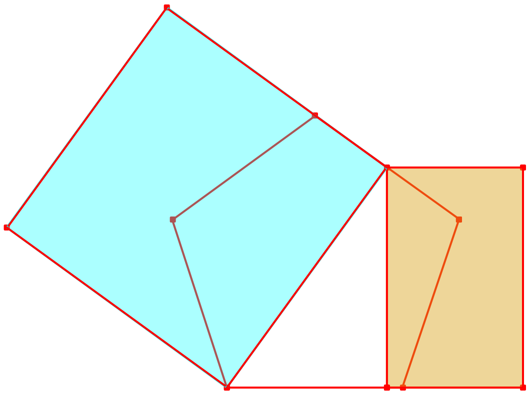
Solució:



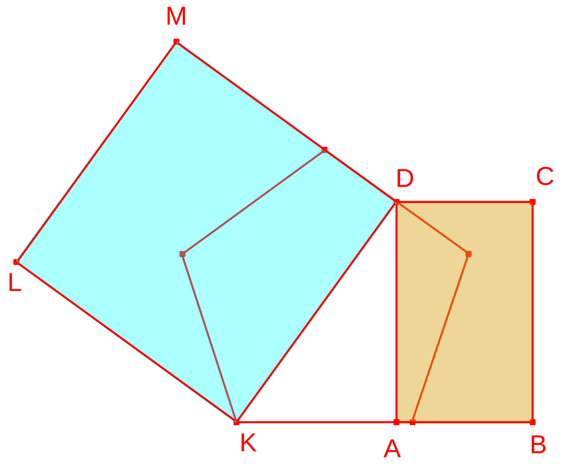
Els triangles BGH, BPH són iguals

HF=BH
angleBHF=90º
x=45º

4435.- La figura està formada per un pentàgon regular, un rectangle auri d'àrea Φ, i un quadrat.
Calculeu l'àrea el quadrat.



Solució:



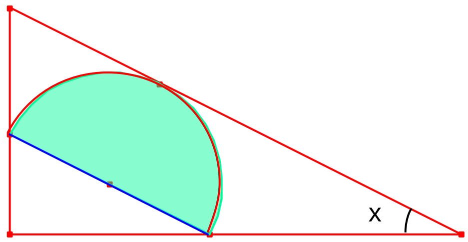
AB=1
BC= Φ

angleDKA=54º

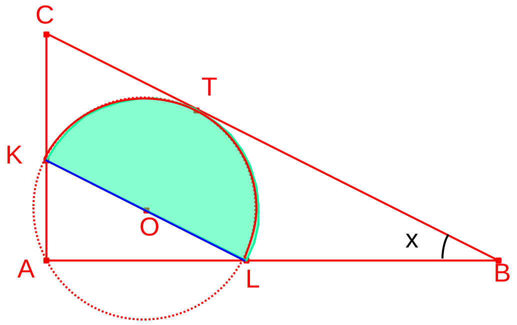
AD/DK=sin54º
DK=2

[KLMD]=4

4437.- La figura està formada per un triangle tal que $\tan x = \frac{1}{2}$, una semicircumferència que té el diàmetre paral·lel a la hipotenusa.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la semicircumferència i del triangle.



Solució:



tan x = 1/2

AB=a, AL=2a, CK=b, BL=2b

Potència C respecte circumferència

CT=sqrt(b(a+b))

Potència B respecte circumferència

BT=2·sqrt(b(a+b))

BC=3·sqrt(b(a+b))

Teorema Pitàgores ABC

$4b^2$-ab-$5a^2$=0

b=(5/4)a

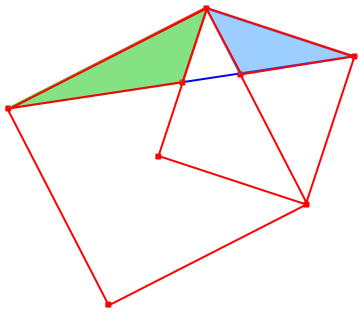
OL=a·sqrt(5)/2

[ABC]=(1/2)2$(a+b)^2$=(81/16)a^2

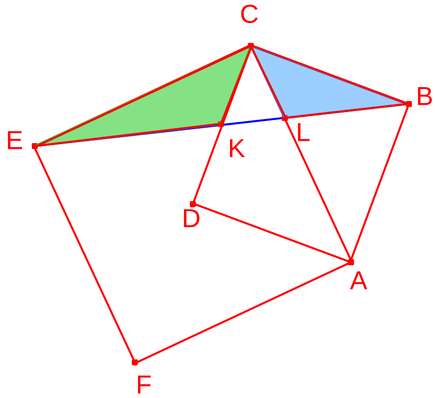
[green]=(5/8)·Pi·a^2

[green]/[ABC]=(10/81)Pi

4438.- La figura està formada per dos quadrats que tenen en comú dos vèrtexs.
Calculeu La proporció entre l'àrea verda i l'àrea blava.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $ACEF$ de costat $\overline{AC} = c\sqrt{2}$
$\angle KCE = \angle BCL = 45°$
$\angle BCE = 135°$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:

$$\overline{BE}^2 = c^2 + 2c^2 + 2 \cdot c \cdot c\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{BE} = c\sqrt{5}$$

Siga $\alpha = \angle BEC$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:

$$\frac{c}{\sin\alpha} = \frac{c\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CEK}$:

$$\frac{\overline{EK}}{\sin 45°} = \frac{c\sqrt{2}}{\sin(45° + \alpha)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CLB}$:

$$\frac{\overline{BK}}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin(90° + \alpha)}$$

Dividint ambdues expressions:

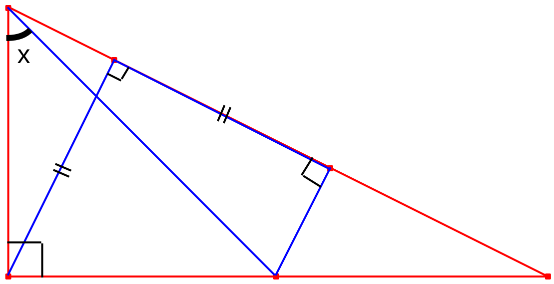
$$\frac{\overline{EK}}{\overline{BL}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos\alpha}{\sin(45° + \alpha)} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10}} = \frac{3}{2}$$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

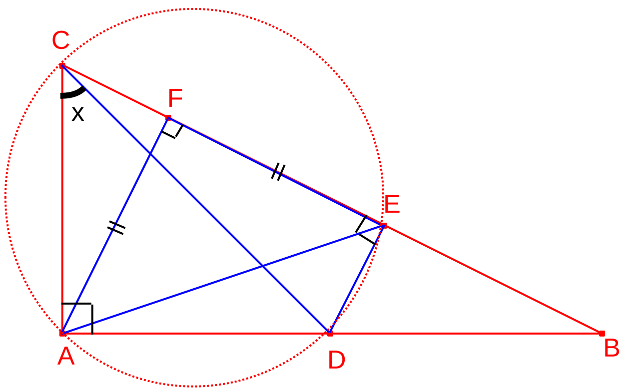
La proporció d'àrees dels triangles $\overset{\Delta}{CEK}, \overset{\Delta}{CLB}$ és:

$$\frac{S_{CEK}}{S_{CLB}} = \frac{\overline{EK}}{\overline{BL}} = \frac{3}{2}$$

4439.- La figura està formada per un triangle rectangle.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleABC=a

angleAEF=angleFAE=45º

angleAED=45º

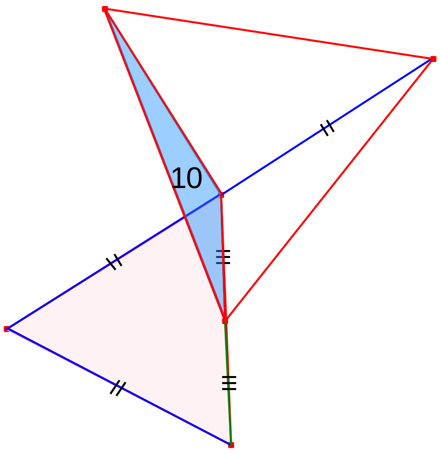
angleADE=90º+a

angleACB=90º-a

ADEC cíclic

x=angleAED=45º

4440.- La figura està formada per dos triangles equilàters.
Si l'àrea ombrejada de blau és 10, calculeu l'àrea del triangle equilàter ombrejat.



Solució:

Siga el triangle equilàter ombrejat $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat $\overline{DE} = x$

Siga el triangle $\overset{\Delta}{FDC}$ d'àrea 10.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$$x^2 = c^2 + \frac{1}{4}c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}c^2\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{7}}{2}c$$

Siga $\alpha = \angle CED$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$$\frac{\frac{1}{2}c}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}, \cos\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}, \sin(60° - \alpha) = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$S_{DCE} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{2}c^2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{8}c^2$$

$$S_{CDF} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{2}c^2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

$$S_{DEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{7}{4}c^2 = \frac{7\sqrt{3}}{16}c^2$$

$$10 = S_{CDF} = S_{DEF} - (S_{DCE} + S_{CDF}) = \frac{\sqrt{3}}{16}c^2$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 40$$