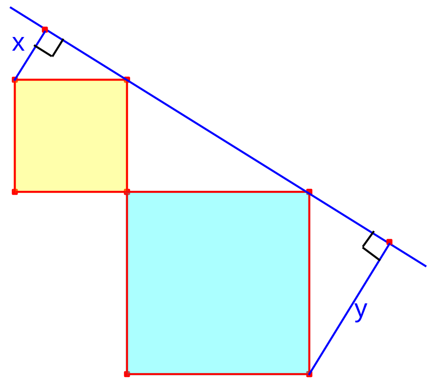
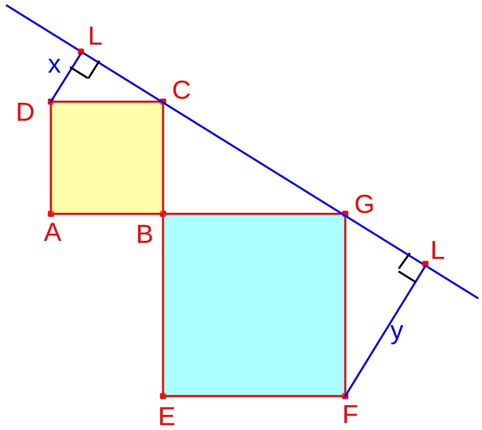
4441.- La figura està formada per dos quadrats.
Si $x + y = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, calculeu la suma de les àrees dels dos quadrats.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
Siga $\overline{KD} = x, \overline{LF} = y, x + y = \Phi$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GBC}, \overset{\Delta}{CKD}, \overset{\Delta}{FLG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{LC} = \frac{bx}{a}$$

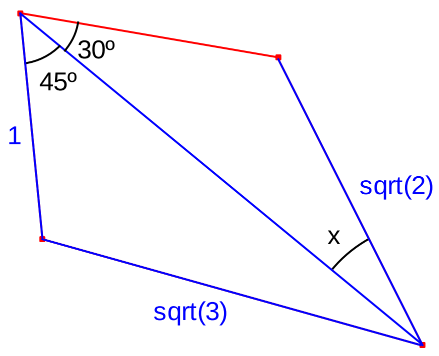
$$\frac{y}{b} = \frac{bx}{a^2} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\Phi = x + y = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

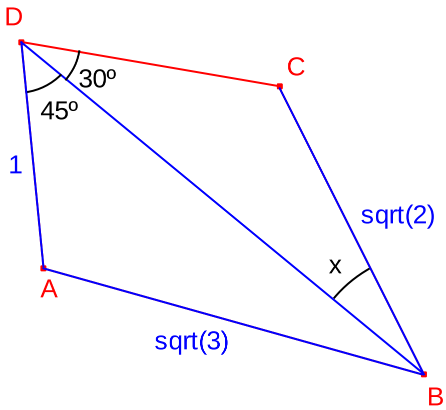
La suma de les àrees dels dos quadrats és:
$S = a^2 + b^2 = \Phi^2$

4442.- En el quadrilàter de la figura calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga el quadrilàter $ABCD, \overline{AD} = 1, \overline{AB} = \sqrt{3}, \overline{BC} = \sqrt{2},, \angle ADB = 45°, \angle BDC = 30°$
Siga $\overline{BD} = y, \gamma = \angle BCD$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:



$$3 = 1 + y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

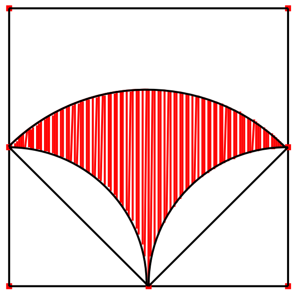
$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2 \cdot \sin\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\sin\gamma = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, 90° < \gamma < 180°$$

$$\gamma = 126°$$

$$x = 180°(+30° + \gamma) = 24°$$

4443.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.

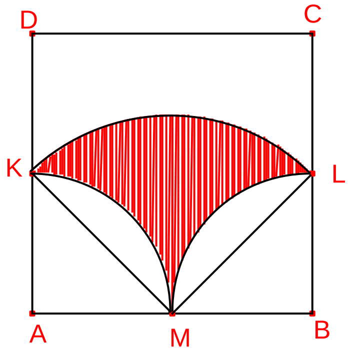


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
$\overline{MK} = \sqrt{2}, \angle KML = 90°$
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrant de radi $\sqrt{2}$ menys l'àrea de dos segments circulars de radi 1 i 90º.

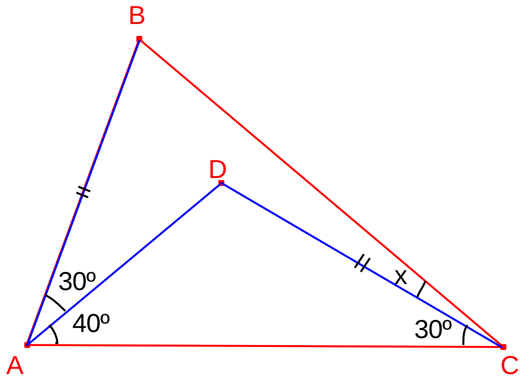
$$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) = 1$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$$



4444.- En el triangle de la figura, calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga $\overline{CD} = \overline{AB} = c$
Siga $\overline{AC} = b$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{c}{\sin\,(30° + x)} = \frac{b}{\sin(80° - x)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\frac{c}{\sin\ 40°} = \frac{b}{\sin 70}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{\sin 40°}{\sin(30° + x)} = \frac{\sin 70°}{\sin(80° - x)}$$

$$\sin 40° \cdot \sin(80° - x) = \sin 70° \cdot \sin(30° + x)$$

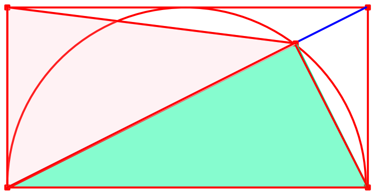
$$\cos(x - 40°) - \cos(120° - x) = \cos(x - 40°) - \cos(100° + x)$$

$$\cos(120° - x) = \cos(100° + x)$$

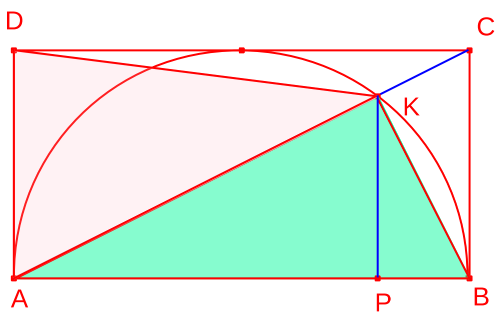
$$120° - x = 100° + x$$

$$x = 10°$$

4445.- La figura està formada per un rectangle que conté una semicircumferència.
Determineu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea rosa.



Solució:



AB=2R, AD=R

angleAKB=90º

KB=x, AK=2x

teorema Pitàgores AKB

$x^2=(4/5)R^2$

$[AKB]=x^2=(4/5)R^2$

KP=y, AP=2y

teorema Pitàgores APK

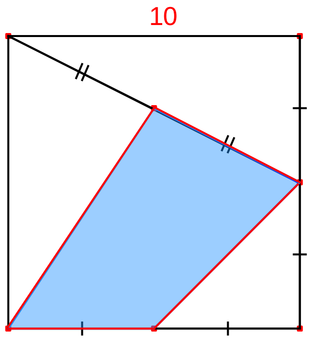
$5y^2=4x^2$

$y=(4/5)x$

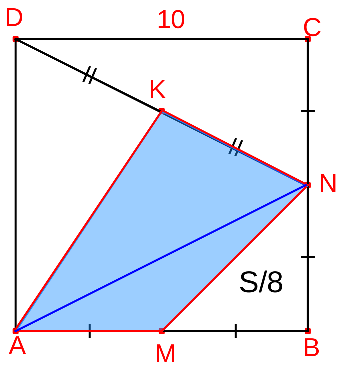
$[ADK]=(1/2)R\cdot 2y=(4/5)R^2$

$[AKB]/[ADK]=1$

4446.- La figura està formada per un quadrat de costat 10.
Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:



[ABCD]=S=100

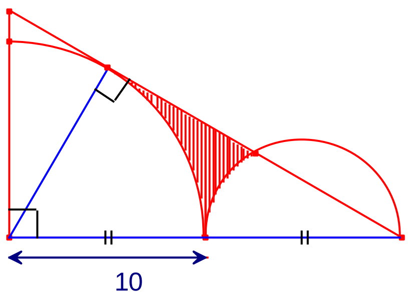
[AND]=S/2

[ANK]=[ADK]=S/4

[AMN]=[MBN]=S/8

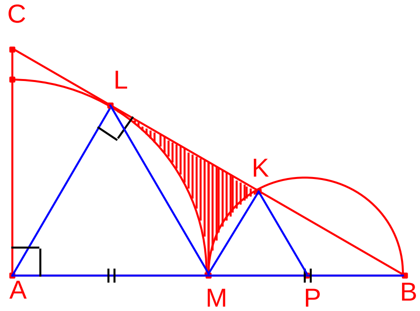
[AMNK]=S/8+S/4=3S/8=75/2

4447.- La figura està formada per un triangle rectangle, un quadrant de radi 10 i una semicircumferència.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

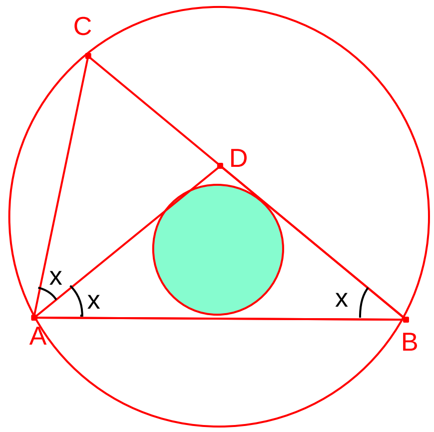
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AB} = 20$
$\overline{AL} = 10$
$\angle MKB = 90°$
Aleshores, $\angle LAB = \angle KMB = 60°$
$\overline{BL} = 10\sqrt{3}$
$\overline{LK} = \overline{BK} = 5\sqrt{3}$



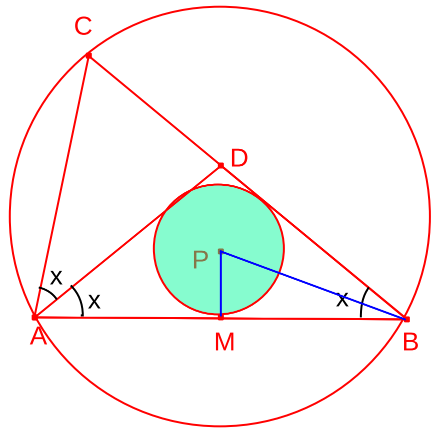
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{LKM}$ menys la suma dels segments circulars de 60º i radis 10 i 5.

$$S_{ombrejada} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{6} \cdot 10^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} 10^2 + \frac{\pi}{6} \cdot 5^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} 5^2 \right) = \frac{175\sqrt{3}}{4} - \frac{125\pi}{6}$$

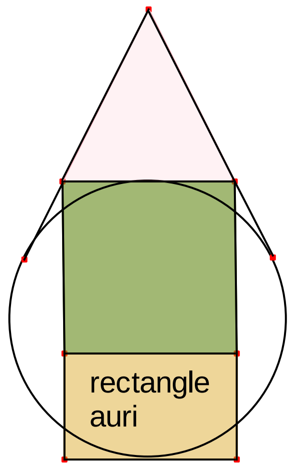
4448.- Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$
Siga $x = \angle CAD = \angle DAB = \angle ABC$
Calculeu el mínim del quocient:
$$\frac{R}{r}$$



Solució:
Siga $r = \overline{PM}$.
$$r = \frac{c}{2}\tan\frac{x}{2} = \frac{c}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$2R = \frac{c}{\sin 3x}$$
$$R = \frac{c}{2\cdot\sin 3x} = \frac{c}{2\sin x\,(3-4\sin^2 x)}$$
$$\frac{R}{r} = \frac{1}{(1-\cos x)(-1+4\cos^2 x)}$$
$$f(x) = \frac{1}{(1-\cos x)(-1-4\cos^2 x)}$$
$$f'(x) = \frac{(-12\cos x + 8\cdot\cos x + 1)\sin x}{\left((1-\cos x)(-1+4\cos^2 x)\right)^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$-12\cos x + 8\cdot\cos x + 1 = 0$$
$$\cos x = \frac{2+\sqrt{7}}{6}$$
Estudiant el signe de la segona derivada, el mínim de la funció s’assoleix quan:
$$x = arccos\frac{2+\sqrt{7}}{2}$$
La proporció mínima és:
$$\frac{R}{r} = \frac{10+7\sqrt{7}}{9} \approx 3.1689$$



4449.- La figura està formada per un rectangle auri, un quadrat i un triangle isòsceles que té les prolongacions dels costats iguals tangents a una circumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat i l'àrea del triangle isòsceles.



Solució:

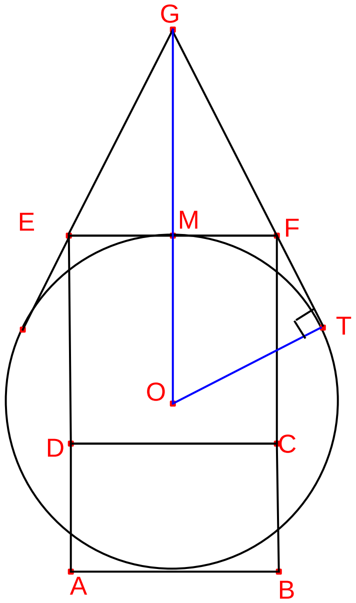
Siga el rectangle auri $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1, \overline{BC} = \frac{1}{\Phi}$

Siga el quadrat $CDEF$ de costat $\overline{CD} = 1$

$\overline{BF} = \Phi$

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OM} = \overline{OT} = \frac{1}{2}\Phi$

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{EFG}$ de costat $\overline{EF} = 1$ i altura $\overline{GM} = x$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GMF}, \overset{\Delta}{GTO}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{\frac{1}{2}\Phi}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\Phi + x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\Phi\right)^2}}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\Phi}{\sqrt{x^2 + \Phi x}}$$

Elevant al quadrat:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1+\Phi}{x^2 + \Phi x}$$

Simplificant:

$x = 1$

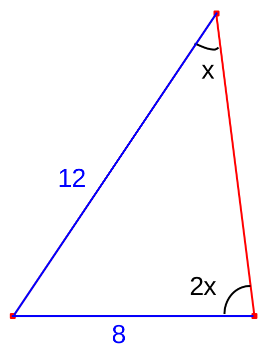
L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{EFG}$ és:

$$S_{EFG} = \frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{2}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{CDEF}}{S_{EFG}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

4450.- Calculeu l'àrea del triangle de la figura.



Solució:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{8}{\sin x} = \frac{12}{\sin 2x}$$

$$\cos x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{8}$$

$$\sin 3x = \sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \sin 3x = 15\sqrt{7}$$