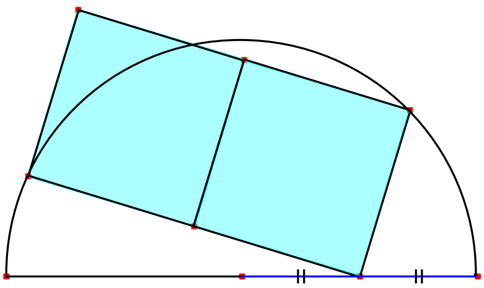
Problemes de Geometria per a l'ESO 446

4451.- La figura està formada per una semicircumferència de radi $R=2$, i dos quadrats.
Calculeu l'àrea ombrejada pels dos quadrats.



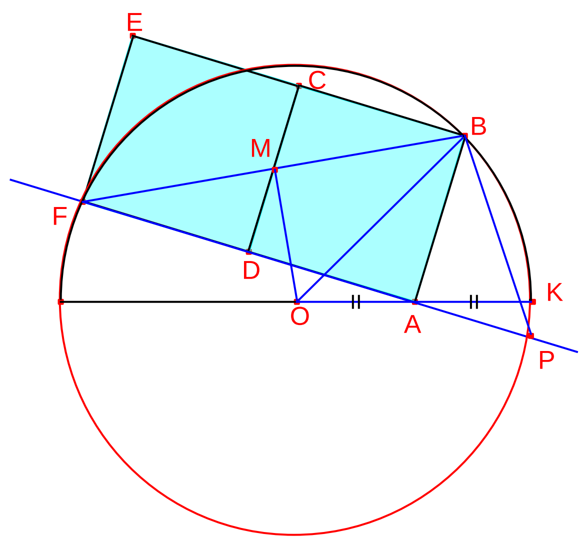
Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OK}=R=2$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB}=c$

$\overline{OA}=\overline{OK}=\frac{1}{2}R=1$

Siga M el punt mig de la corda $\overline{BF}$

$\overline{MB}=\frac{\sqrt{5}}{2}c$

La recta AF talla la circumferència en el punt P
Siga $\overline{AP}=a$
Aplicant la potència de A respecte de la circumferència:
$2ac=3$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OMB}, \overset{\Delta}{PAB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}c}{\sqrt{4-\frac{5}{4}c^2}}$$

Elevant al quadrat i simplificant:
$15a^2-32ac+15c^2=0$

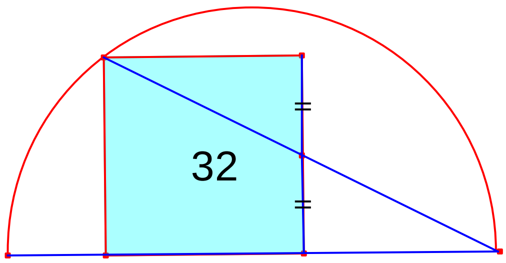
$$a=\frac{16-\sqrt{31}}{15}c$$

$$2\frac{16-\sqrt{31}}{15}c^2=3$$

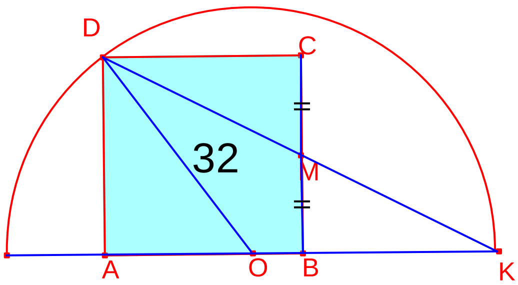
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ABEF}=2c^2=\frac{45}{16-\sqrt{31}}=\frac{16+\sqrt{31}}{5}$$

4452.- La figura està formada per una semicircumferència i un quadrat d'àrea 32. Calculeu l'àrea del semicercle.



Solució:



$AB=c$

$c^2=32$

$BK=AB=c$

$OK=R$

$OA=2c-R$, OD

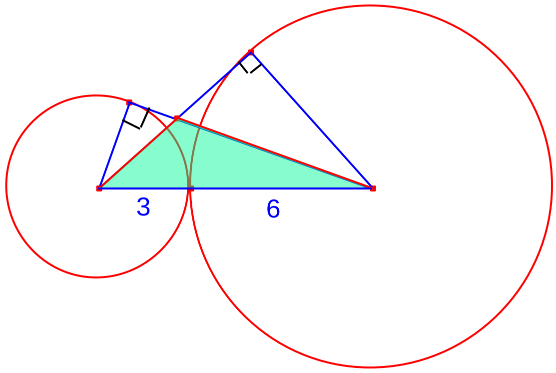
Teorema Pitàgores OAD

$R^2=c^2+(2c-R)^2$

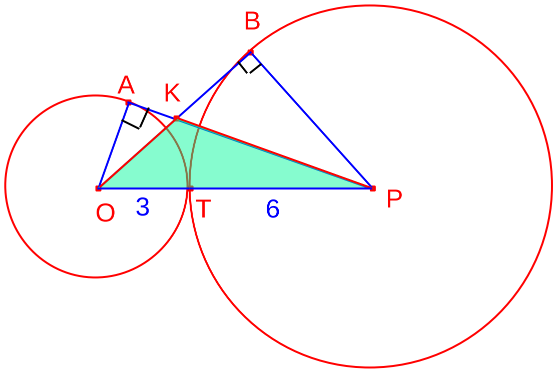
$R=(5/4)c$

$[\text{semicercle}]=(1/2)Pi\cdot R^2=25\cdot Pi$

4453.- La figura està formada per dues circumferències de radis 3, 6.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.

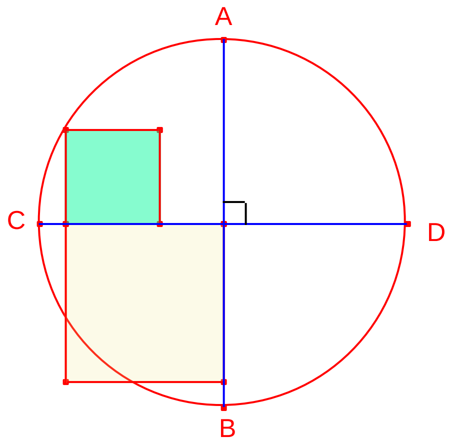


Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OA} = 3$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PB} = 6$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OAK}, \overset{\Delta}{PBK}$ són semblants i de raó $1:2$
Siguen $\overline{OK} = x, \overline{PK} = 2x, \overline{AK} = y, \overline{BK} = 2y$

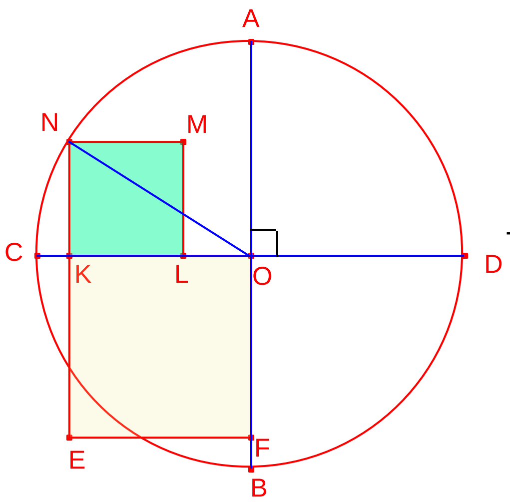


Siguen $\alpha = \angle BOP, \beta = \angle APO$
$\sin\alpha = \frac{2}{3}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$
$\sin\beta = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$$\frac{\overline{OK}}{\sin\beta} = \frac{9}{\sin(\alpha+\beta)}$$
$$\frac{\overline{OK}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}$$
$$\overline{OK} = \frac{27}{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}$$
L'àrea del triangle ombrejat és:
$$S_{OPK} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{27}{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{3} = 3\left(4\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$$

4454.- La figura està formada per una circumferència amb dos diàmetres perpendicular $\overline{AB} = \overline{CD} = 8$ i dos quadrats.
Calculeu la suma de les àrees dels dos quadrats.



Solució:



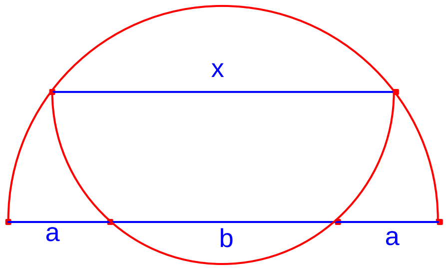
AB=CD=8
KL=a, OK=b

ON=4
Teorema Pitàgores NKO

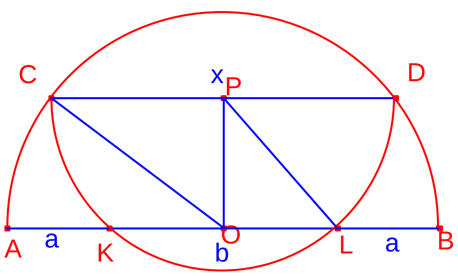
$a^2+b^2=4^2$

[KLMN]+[OAEF]=16

4455.- La figura està formada per dos semicircumferències amb els diàmetres paral·lels. Determineu x en funció de a, b



Solució:



OA=OC=(2a+b)/2

PC=PD=x/2

PL=x/2

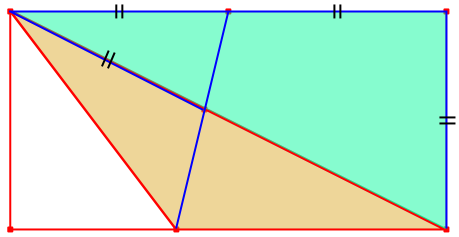
OL=b/2

Teorema Pitàgores CPO, POL:

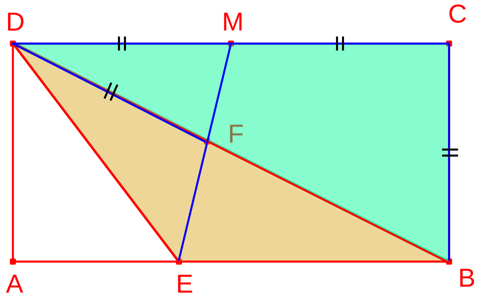
$((2a+b)/2)^2-(x/2)^2=(x/2)^2-(b/2)^2$

x=sqrt($2a^2+2ab+b^2$)

4456.- En el rectangle de la figura hi ha quatre segments iguals.
Calculeu la proporció entre l’àrea groga i l’àrea verda.



Solució:



DM=CM=BC=DF=a

BF=a·sqrt(5)

BF=a(sqrt(5)-1)

Els triangles DMF, BEF són semblants i de raò 1:(sqrt(5)-1)

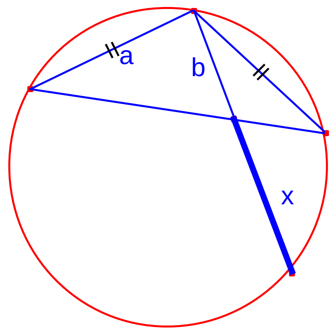
BE=(sqrt(5)-1)a

[EBD]=(sqrt(5)-1)·a²/2

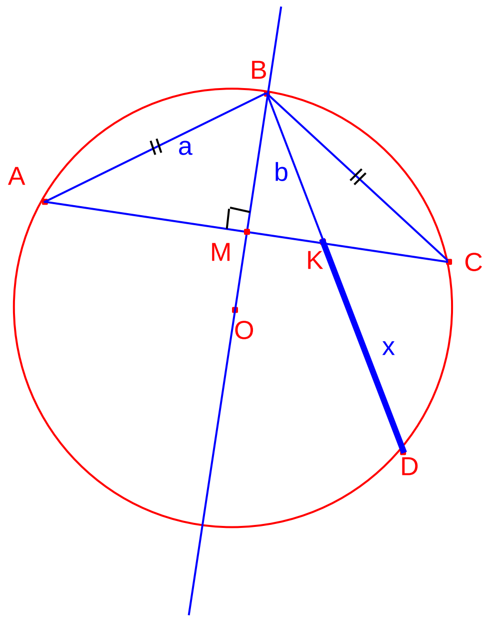
[DCB]=a²

[EBD]/[DCB]=Φ-1

4457.- La figura està formada per una circumferència i quatre cordes dos d'elles iguals.
Calculeu la mesura del segment x en funció dels segments a, b.



Solució:



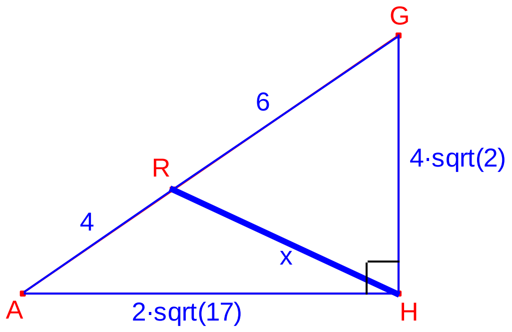
AB=CB=a
BK=b
DK=x

BM=c
AM=CM=sqrt(a²-c²)
MK=sqrt(b²-c²)
CK=sqrt(a²-c²)-sqrt(b²-c²)
AK=sqrt(a²-c²)+sqrt(b²-c²)

Potència de K respecte de la circumferència

bx=AK·CK=a²-b²
x=(a²-b²)/b

4458.- La figura està formada per un triangle rectangle.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:
Aplicant el teorema invers de Pitàgores:

$$10^2 = \left(2\sqrt{17}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2$$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AHG}, H = 90°$ és rectangle.
Siga $\alpha = \angle GHA$

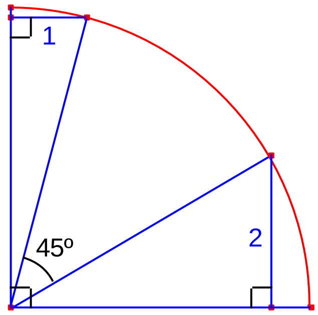
$$\cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{10} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{RHG}$:

$$x^2 = 36 + 32 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$x = \frac{2\sqrt{185}}{5}$$

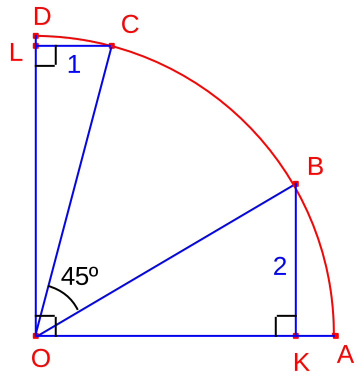
4459.- La figura està formada per un quadrant i dos radis que formen 45º.
Calculeu el radi del quadrant.



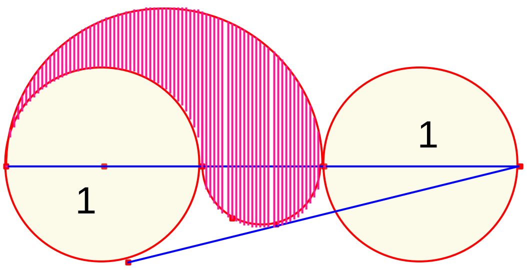
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga $\alpha = \angle AOB$
$\angle DOC = 45° - \alpha$

$$\sin\alpha = \frac{2}{R}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{R^2-4}}{R}$$

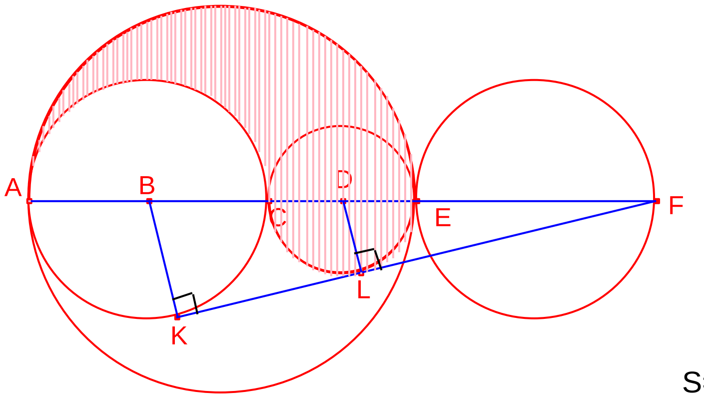
$$\frac{1}{R} = \sin(45° - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{R^2-4}}{R} - \frac{2}{R}\right)$$
$$\sqrt{2} + 2 = \sqrt{R^2-4}$$
Elevant al quadrat i simplificant:
$$R^2 = 10 + 4\sqrt{2}$$
$$R = \sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$$



4460.- La figura està formada per dos cercles d'àrea 1 i dos semicercles. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:



BA=BC=r, EF=2r

$Pi\cdot r^2=1$

DC=DE=s

BKF, DLF semblants

Teorema de Tales:

$r/(3r+2s)=s/(s+2r)$

$s/r=(-1+sqrt(5))/2=1/\Phi$

$S=(1/2)((r+s)^2-r^2+s^2)=Pi\cdot r^2=1$