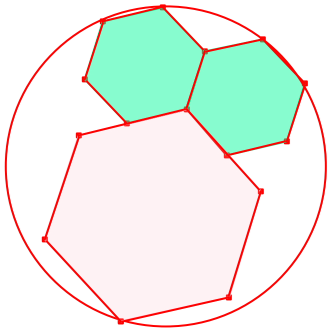
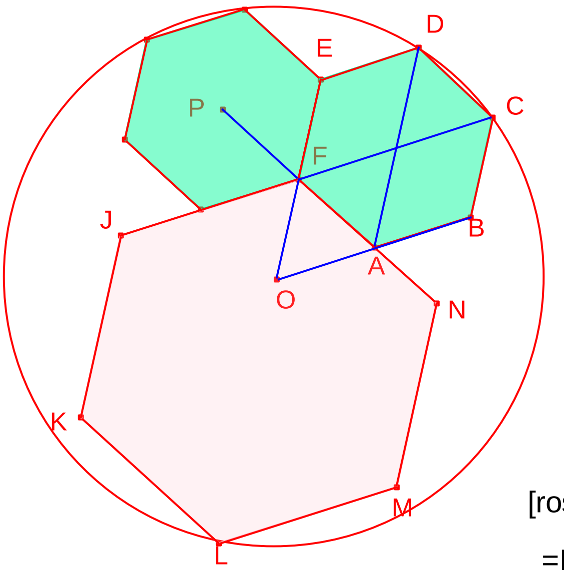
Problemes de Geometria per a l'ESO 447

4461.- La figura està formada per una circumferència que conté tres hexàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea rosa



Solució:



AB=1

OC=OD

O centre circumferència

OL=OC=R

Teorema cosinus OFC

$R^2=4+1+2\cdot2\cdot1\cdot(1/2)$

R=sqrt(7)

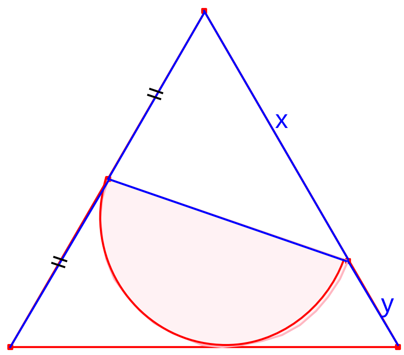
FL=1+sqrt(7)

FC=2

[rosa]/[verda]=[JKLMNF/(2·[ABCDEF)]=

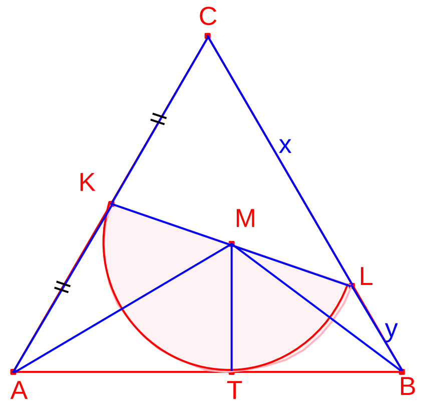
$=FL^2/(2\cdot FC^2)$=(4-sqrt(7))/4

4462.- La figura està formada per un triangle equilàter que conté una semicircumferència.
Calculeu la proporció dels segments:
$$\frac{y}{x}$$



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 2$
$y = 2 - x$

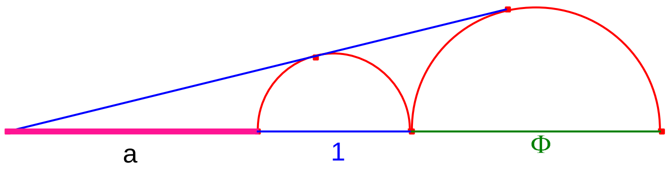


Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CKL}$:
$\overline{KL}^2 = x^2 - x + 1$
Siga $\alpha = \angle KLC$

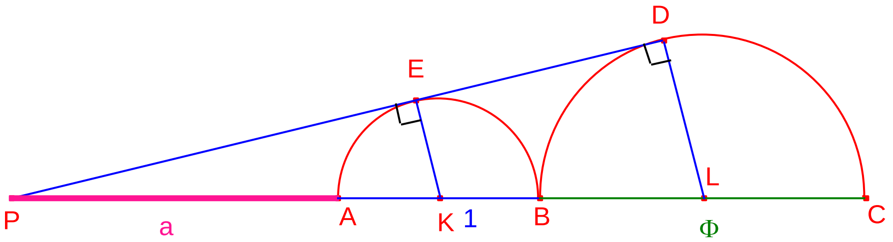
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CKL}$:
$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}, \cos\alpha = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MLB}$:
$$\overline{BM}^2 = \frac{x^2 - x + 1}{4} + (2 - x)^2 + 2(2 - x)\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{2} \cdot \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{x^2 - 7x + 13}{4}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MTB}$:
$$\overline{BT}^2 = \frac{x^2 - 7x + 13}{4} - \frac{x^2 - x + 1}{4} = \frac{-6x + 12}{4}$$
$$\overline{BT} = \frac{\sqrt{12 - 6x}}{2}$$
$\angle AKM = 60° + \alpha$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMK}$:
$$\overline{AM}^2 = \frac{x^2 - x + 1}{4} + 1 - 2\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}\right) =$$
$$= \frac{x^2 - 3x + 9}{4}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMT}$:
$$\overline{AT}^2 = \frac{x^2 - 3x + 9}{4} - \frac{x^2 - x + 1}{4} = \frac{-2x + 8}{4}$$
$$\overline{AT} = \frac{\sqrt{8 - 2x}}{2}$$
$\overline{AT} + \overline{BT} = 2$
$$\frac{\sqrt{8 - 2x}}{2} + \frac{\sqrt{12 - 6x}}{2} = 2$$
Resolent l'equació:
$x = -7 + 6\sqrt{2}$
La proporció és:
$$\frac{x}{y} = \frac{-7 + 6\sqrt{2}}{9 - 6\sqrt{2}} = \frac{3 + 4\sqrt{2}}{3}$$

4463.- En la figura els diàmetres de les dues semicircumferències són $1, \Phi$
Calculeu la mesura del segment a



Solució:



$\overline{KE} = \overline{KA} = \frac{1}{2}$

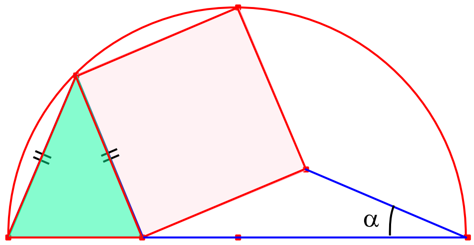
$\overline{LD} = \overline{LB} = \frac{1}{2}\Phi$

Els triangles rectangles $P\overset{\Delta}{E}K, P\overset{\Delta}{D}L$ són semblants.
aplicant el teorema de Tales:

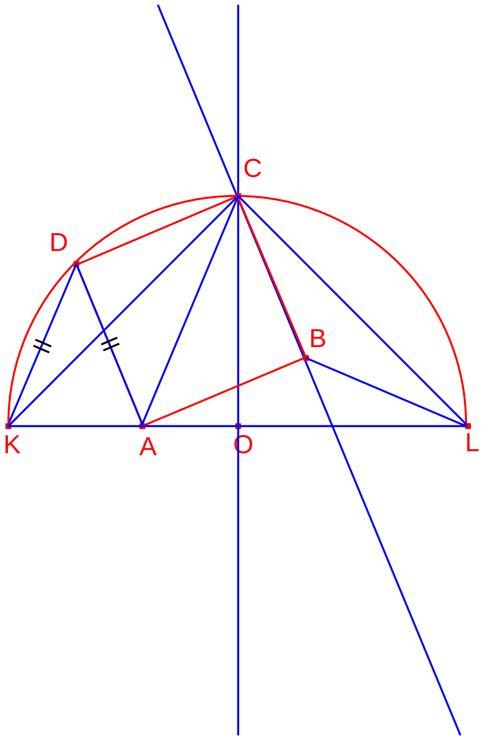
$$\frac{\frac{1}{2}}{a+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\Phi}{a+1+\frac{1}{2}\Phi}$$

$a = \Phi$

4464.- La figura està formada per un semicercle que conté un quadrat i un triangle isòsceles. Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:



angleDAC=angleDCA=x

angleADC=180º-2x

angleKOC=2x

angleKDA=90º-2x

angleDKA=angleKAD=45+x

angleCKO=45º

x=45º/2

angleBAL=x=45º/2

angleBDL=x=45º/2

angleALC=45º

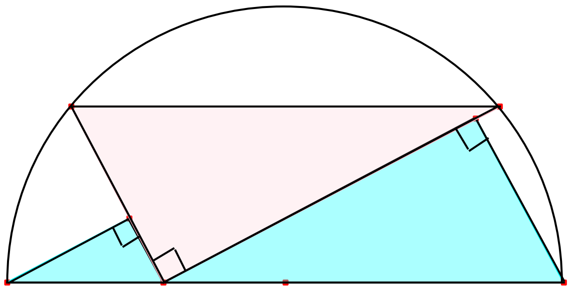
angleCAL=45º+x=135º/2

angleACL=135º/2

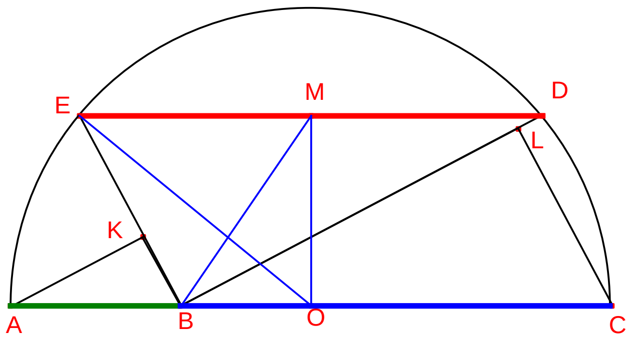
Els tgriangles CBL, ABL són iguals

angleABL = angleBLC=45º/2

4465.- La figura està formada per una semicircumferència que conté tres triangles rectangles.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle rosa i la suma de les àrees dels triangles blaus.



Solució:



AB=a, BC=b, DE=c

[ABK]/[DEB]=a^2/c^2

[BCL]/[DEB]=b^2/c^2

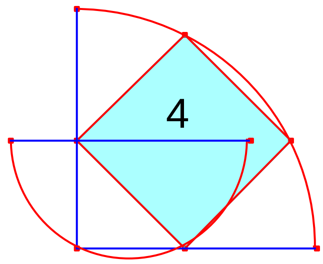
Teorema Pitàgores BOM, EMO

$(c/2)^2-((b-a)/2)^2=((a+b)/2)^2-(c/2)^2$

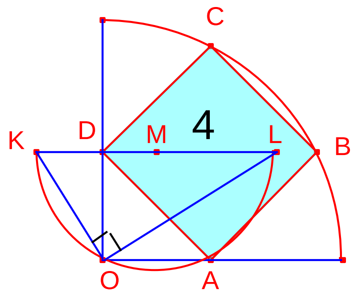
$c^2=a^2+b^2$

$([ABK]+[BCL])/[DEB]=(a^2+b^2)/c^2=1$

4466.- La figura està formada per un quadrant que té inscrit un quadrat d'àrea 4 i un semicercle.
Calculeu l'àrea del semicercle.



Solució:



AD=2

OD=sqrt(2)

ML==MK=r

MD=AD/2=sqrt(2)/2

Teorema Altura al triangle KOL

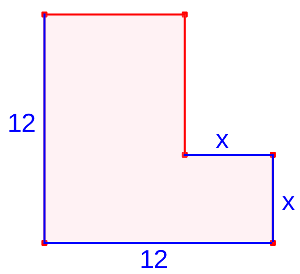
$OD^2=KD \cdot LD$

$2=(r-sqrt(2)/2)\cdot(r+sqrt(2)/2$

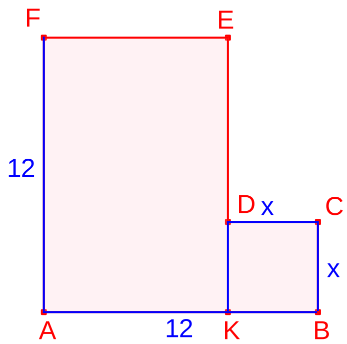
$r^2=5/2$

[semicercle]$=Pi\cdot r^2/2=(5/4)Pi$

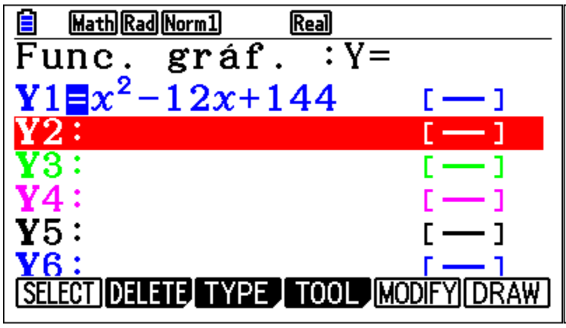
4467.- La figura està formada per un hexàgon.
Determineu el valor x que fa mínima l’àrea de l’hexàgon.
Quin és el valor de l’àrea mínima.

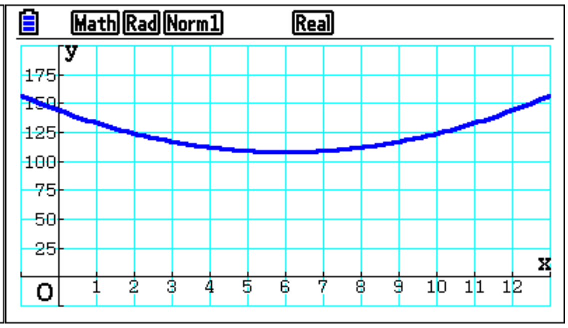


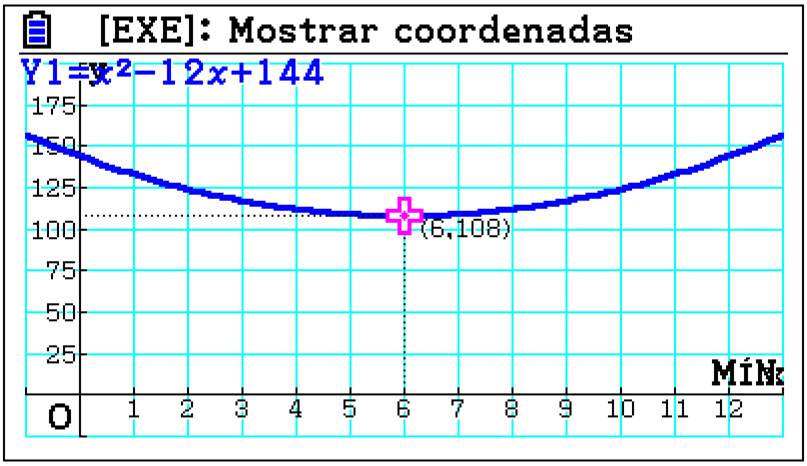
Solució:
Siga l’hexàgon regular $ABCDE, \overline{AB} = \overline{AF} = 12, \overline{BC} = \overline{CD} = x$
siga K la projecció de D sobre $\overline{AB}$.
L’àrea de l’hexàgon regular és igual a l’àrea del quadrat $KBCD$ més l’àrea del rectangle $AKEF$.
$S_{ABCDEF} = x^2 + 12(x-12) = x^2 - 12x + 144$
Completant quadrats:
$S_{ABCDEF} = (x-6)^2 + 108$
El mínim s’assoleix quan $x = 6$
L’àrea mínima és:
$S_{mín} = 108$



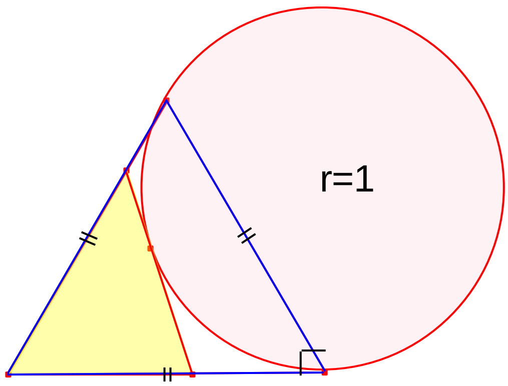
Gràficament:



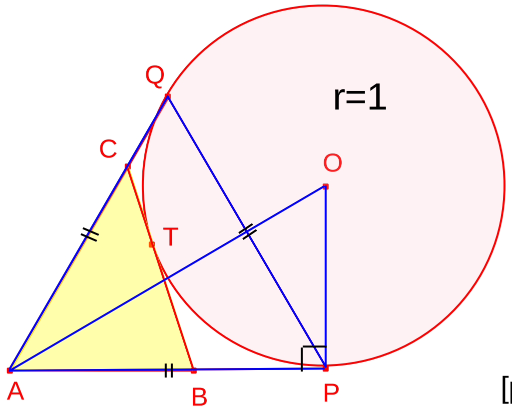




4468.- En la figura, la circumferència de radi 1 és tangent a tres segments en tres punts Determineu el perímetre del triangle groc.



Solució:



AP=PQ=AQ=c

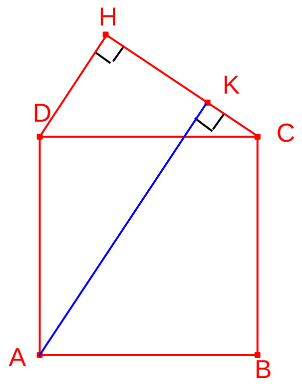
BP=BT=x
CQ=CT=y

[perimetreABC]=AP+AQ=2c

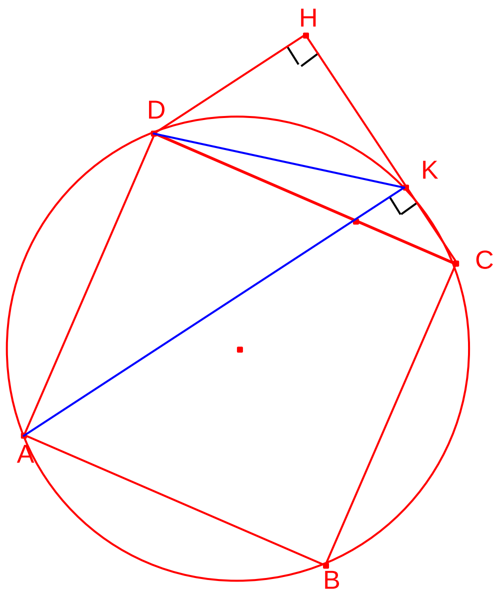
c/r=tan 60º
c=sqrt(3)

[perimetreABC]=2c=2·sqrt(3)

4469.- En la figura, $ABCD$ és un quadrat.
Si $\overline{AK} = 20, \overline{KC} = 4$, calculeu la mesura del segment $\overline{DH}$



Solució:



ABCK cíclic

ABCKD cíclic

angleKBC=angleKAC=angleKDC=x

angleHDC=45º+x

angleHDK=angleHKD=45º

AC²=20²+4²

AB=c=4·sqrt(13)

Teorema Tolomeu ABCK

20c+4c=AC·BK

BK=12·sqrt(2)

angleDKB=90º

Teorema Pitàgores DKB

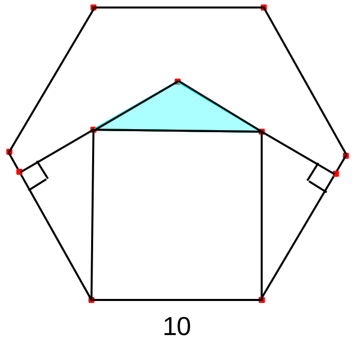
DK²=416-288=

DK=8·sqrt(2)

Teorema Pitàgores DHK

DH=HK=8

4470.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 10 i un quadrat en el seu interior sobre un costat de l'hexàgon.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c = 10$
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga el triangle $\overset{\Delta}{GHJ}, \overline{GH} = c, \angle HGJ = 30°$
Siga M el punt mig del costat $\overline{GH}$

$$\overline{MJ} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{GHJ} = \frac{1}{2}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}c = \frac{\sqrt{3}}{12}c^2 = \frac{25\sqrt{3}}{3}$$