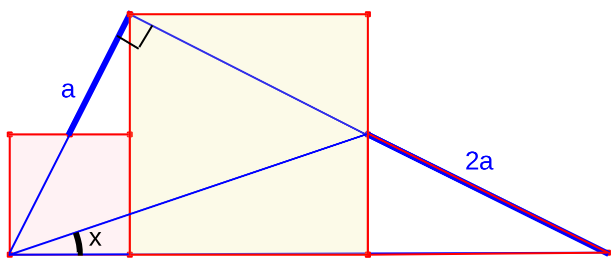
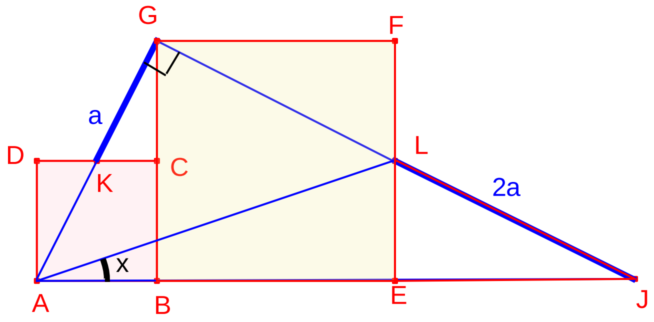
Problemes de Geometria per a l'ESO 448

4471.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



AB=b, BE=c

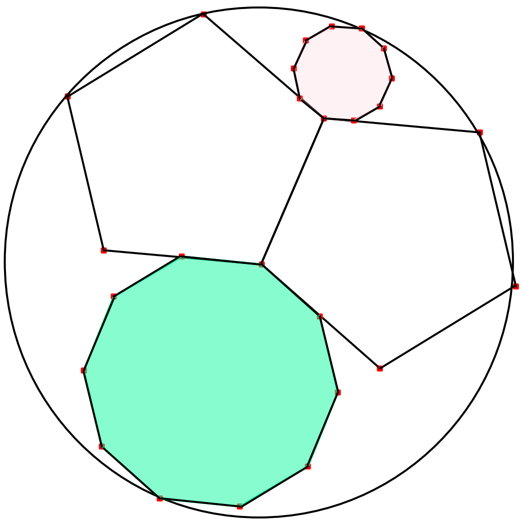
ABG, LFG iguals

AG=LG
angleALJ=135º
GC=c-b
LE=c-b

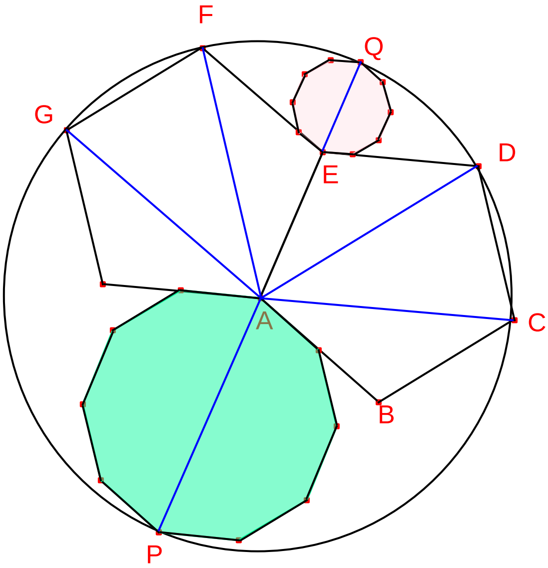
EJ=2·CG=2(c-b)
angleLJE=y

tan y=1/2
x=45º-y
tan x=1/3

4472.- La figura està formada per una circumferència que conté dos pentàgons regulars iguals i dos decàgons regulars. Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea rosa



Solució:



Siga el plentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{AF} = \overline{AG} = \Phi$

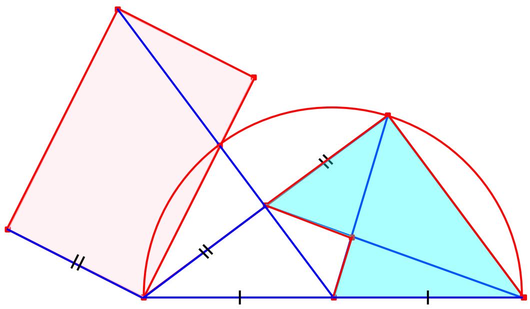
A és el centre de la circumferència exterior.

$\overline{AP} = \Phi, \overline{EQ} = \Phi - 1 = \dfrac{1}{\Phi}$

La proporció entre les àrees dels dos decàgons regulars és:

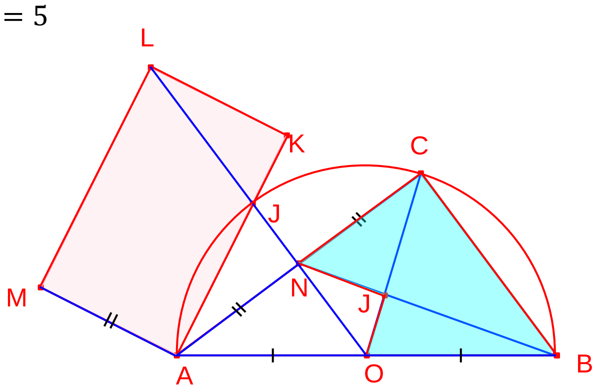
$$\frac{S_{verd}}{S_{rosa}} = \left(\frac{\overline{AP}}{\overline{EQ}}\right)^2 = \Phi^4$$

4473.- La figura està formada per un semicercle que conté un triangle $3:4:5$, un rectangle rosa i un pentàgon blau
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle rosa i l'àrea del pentàgon blau.



Solució:

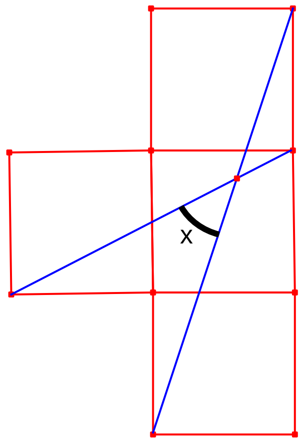
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°, \overline{AB} = 5, \overline{BC} = 3, \overline{AC} = 4,$
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 5$
Siga N el punt mig del costat $\overline{AN}$
$\angle ANO = 90°$
Siga el rectangle $AKLM$, $\overline{AM} = \overline{AN} = 2$
$\overline{OJ} = \frac{5}{2}, \overline{ON} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{3}{2}$
$\overline{NJ} = 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANJ}$:
$\overline{AJ} = \sqrt{5}$



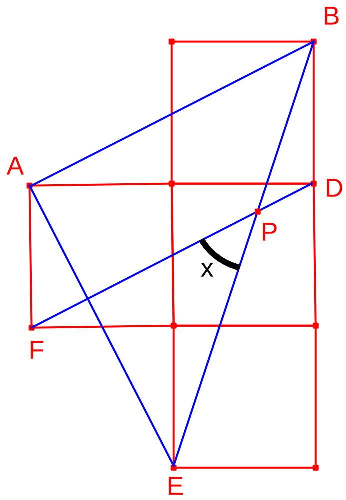
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ANJ}, \overset{\Delta}{LKJ}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{JK} = \overline{NJ} = 1, \overline{AK} = 1 + \sqrt{5}$
El àrea del rectangle $AKLM$ és:
$S_{AKLM} = 2\left(1 + \sqrt{5}\right) = 4\Phi$

J és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ intersecció de les mitjanes $\overline{BN}, \overline{CO}$
Aleshores:
$\overline{BJ} = 2 \cdot \overline{NJ}, \overline{CJ} = 2 \cdot \overline{OJ}$
$S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 3$
$S_{CNJ} = S_{OJB} = \frac{1}{3} \cdot S_{OBC} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$
L'àrea del pentàgon $OBCNJ$ és:
$S_{OBCNJ} = S_{OBC} + S_{CNJ} = 3 + 1 = 4$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{AKLM}}{S_{OBCNJ}} = \frac{4\Phi}{4} = \Phi$

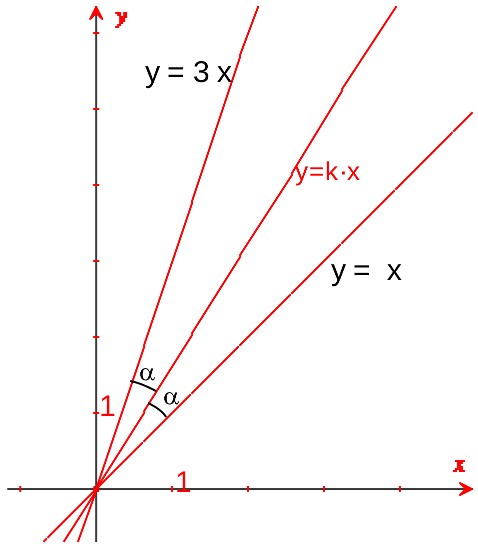
4474.- La figura està formada per quatre quadrats.
Calculeu la mesura de l’angle x



Solució:
$\overline{AB} = \overline{FD}, \overline{AF} = \overline{BD}$
aleshores,
$\overline{AB}, \overline{FD}$ són paral·lels.
$\angle BAE = 90°$
$x = \angle EPF = \angle ABE = 45°$



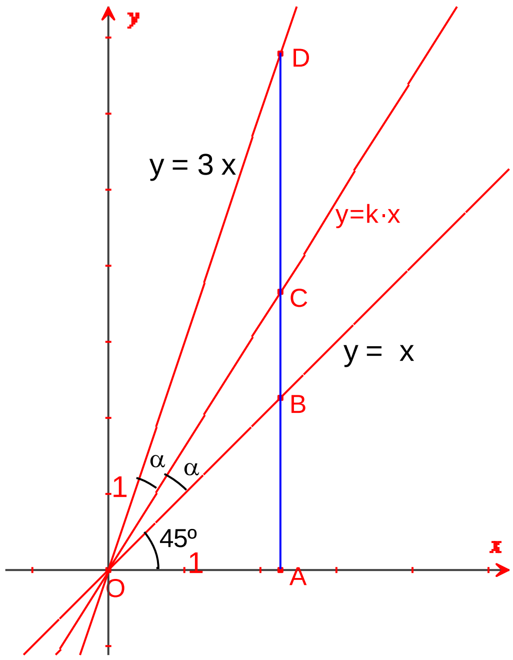
4475.- La figura està formada per tres rectes que passen per l'origen de coordenades de uns eixos coordenats.
Determineu el valor k



Solució:

$\tan(45° + \alpha) = k, \tan(45° + 2\alpha) = 3$

$$k = \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$$
$$\tan\alpha = \frac{k-1}{k+1}$$



$$3 = \tan(45° + 2\alpha) = \frac{1 + \tan 2\alpha}{1 - \tan 2\alpha} = \frac{1 + \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}{1 - \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}} =$$
$$= \frac{-\tan^2\alpha + 2\tan\alpha + 1}{-\tan^2\alpha - 2\tan\alpha + 1} = \frac{k^2 + 2k - 1}{-k^2 + 2k + 1}$$

$$k^2 - k - 1 = 0$$
$$k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

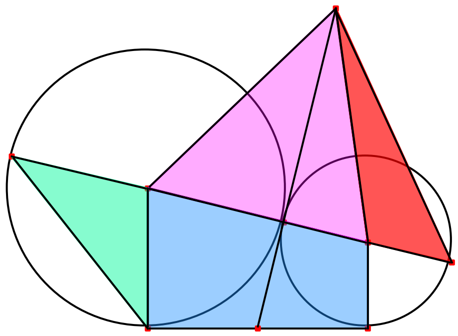
$\tan(45° + \alpha) = k, \tan(45° + 2\alpha) = 3$

$$k = \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$$
$$\tan\alpha = \frac{k-1}{k+1}$$

$$3 = \tan(45° + 2\alpha) = \frac{1 + \tan 2\alpha}{1 - \tan 2\alpha} = \frac{1 + \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}{1 - \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}} = \frac{-\tan^2\alpha + 2\tan\alpha + 1}{-\tan^2\alpha - 2\tan\alpha + 1} =$$
$$= \frac{k^2 + 2k - 1}{-k^2 + 2k + 1}$$

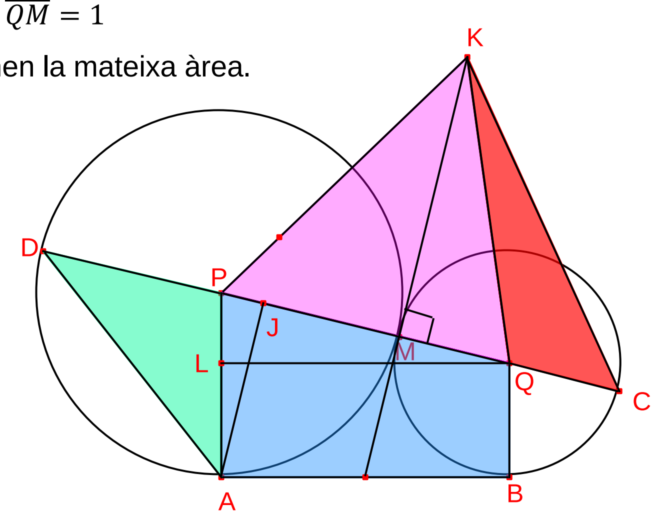
$$k^2 - k - 1 = 0$$
$$k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

4476.- En la figura els radis de les circumferències tangents són $1, \Phi$
Les àrees del quadrilàter blau i el triangle morat són iguals.
Calculeu la proporció entre els triangles verd i roig.



Solució:
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PA} = \overline{PM} = \Phi$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QB} = \overline{QM} = 1$

El trapezi rectangle $ABQP$ i el triangle $\overset{\Delta}{PQK}$ tenen la mateixa àrea.
Aleshores, $\overline{AB} = \overline{MK}$

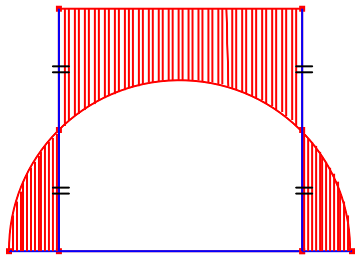


Siga J la projecció de A sobre $\overline{PQ}$.
Siga L la projecció de Q sobre $\overline{AP}$
$\overline{LQ} = \overline{AB}$

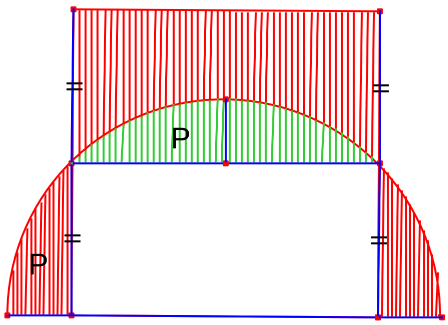
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AJP}, \overset{\Delta}{QLP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{AB}} = \frac{\Phi}{1+\Phi}$$
$$\overline{AJ} = \frac{1}{\Phi} \cdot \overline{AB}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QCK}$ és:
$$S_{QCK} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APD}$ és:
$$S_{APD} = \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \frac{1}{\Phi}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$
Les àrees dels triangles són iguals.

4477.- La figura està formada per un quadrat i un semicercle.
L'àrea ombrejada és 8.
Calculeu l'àrea del quadrat.

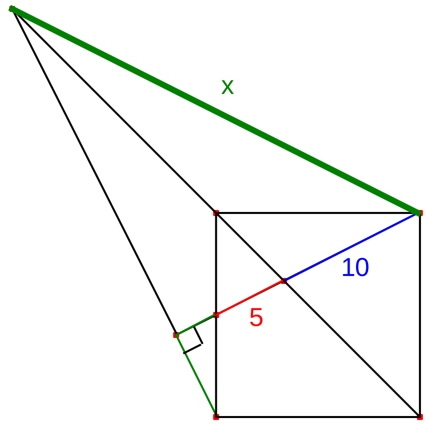


Solució:



L'àrea del quadrat és el doble de l'àrea ombrejada.
L'àrea del quadrat és 16

4478.- La figura està formada per un quadrat.
Calculeu la mesura del segment x



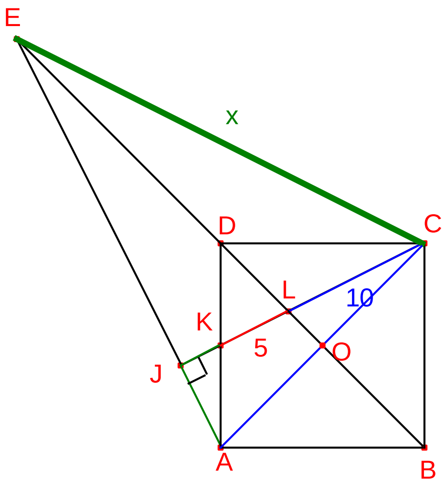
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$, de centre O
Siga $\angle DCK = \alpha$
$\angle JCA = \angle OEC = 45° - \alpha$

$$\cos\alpha = \frac{c}{15}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{225 - c^2}}{15}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LOC}$:

$$\frac{c\sqrt{2}}{20} = \cos(45° - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{c + \sqrt{225 - c^2}}{15}\right)$$

Resolent ‘equació:
$c = 6\sqrt{5}$
$\overline{OC} = 3\sqrt{10}, \overline{OL} = \sqrt{10}$

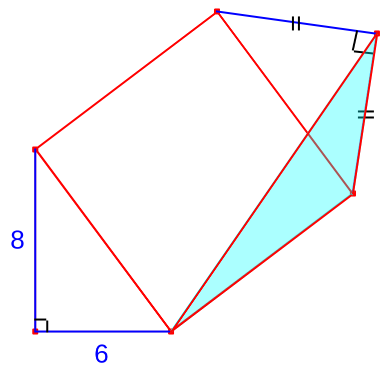


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LOC}, \overset{\Delta}{COE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

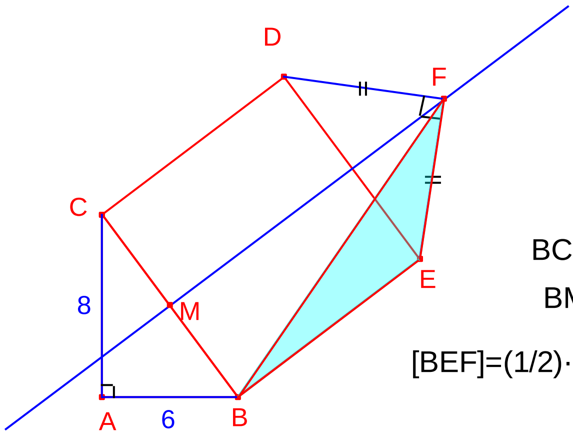
$$\frac{x}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

$x = 30$

4479.- La figura està formada per un triangle rectangle de catets 6 i 8, un quadrat sobre la hipotenusa, dos segments iguals i perpendiculars. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:

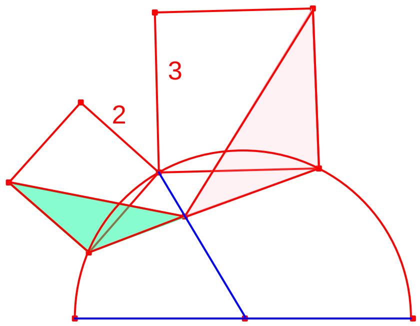


BC=10

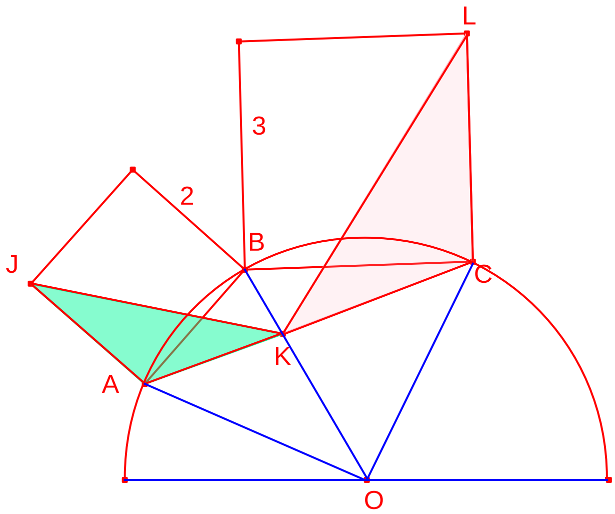
BM=5

[BEF]=(1/2)·BE·BM=(1/2)·10·5=25

4480.- La figura està formada per un semicercle i dues cordes de longituds 2, 3 sobre les que s'han dibuixat dos quadrats.
Calculeu la proporció entre les àrees dels triangles ombrejats



Solució:
Siguen $\overline{AB} = 2, \overline{BC} = 3$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$
Siguen $\angle AOB = 2\alpha, \angle BOC = 2\beta$
$\angle BAC = \beta, \angle BCA = \alpha$
Siguen $x = \widetilde{AK}, y = \overline{CK}$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$\frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{r}{\sin(90° + \alpha - \beta)}$$

$$x = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(90° + \alpha - \beta)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BOC}$:

$$\frac{y}{\sin 2\beta} = \frac{r}{\sin(90° + \alpha - \beta)}$$

$$y = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(90° + \alpha - \beta)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2}{3}$$

L'àrea dels dos triangles ombrejats és:

$$S_{AKJ} = \frac{1}{2} 2 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin(90° + \alpha - \beta)} \cdot \cos \beta$$

$$S_{KCL} = \frac{1}{2} 3 \cdot \frac{\sin 2\beta}{\sin(90° + \alpha - \beta)} \cdot \cos \alpha$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{AKJ}}{S_{KCL}} = \frac{2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos \beta}{3 \cdot \sin 2\beta \cdot \cos \alpha} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4}{9}$$