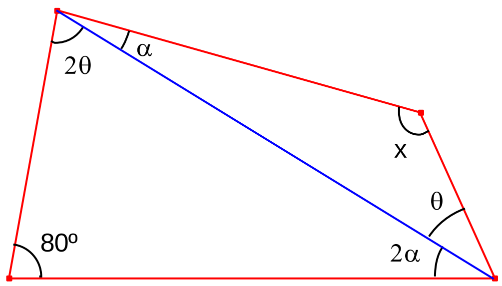
4481.- En el quadrilàter de la figura calculeu la mesura de l'angle x

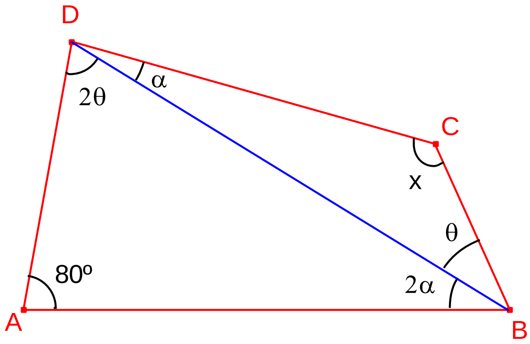


Solució:

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és 180º

$80° + 2\alpha + 2\theta = 180°$

$\alpha + \theta = 50°$

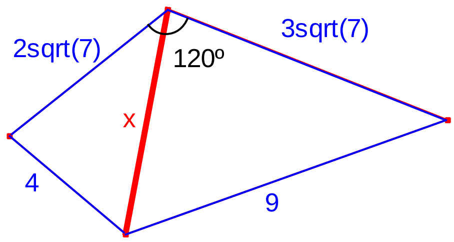


La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és 180º

$\alpha + \theta + x = 180°$

$x = 130°$

4482.- En el quadrilàter de la figura calculeu la mesura de la diagonal x



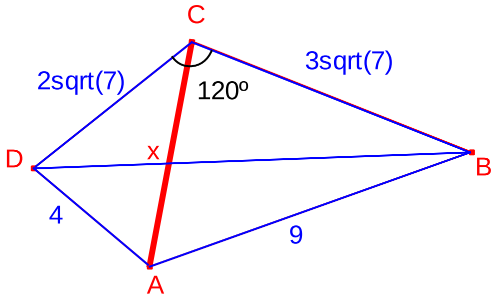
Solució:

Siga el quadrilàter ABCD $\overline{AB} = 9, \overline{BC} = 3\sqrt{7}, \overline{CD} = 2\sqrt{7}, \overline{AD} = 4, C = 120°$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$\overline{BD}^2 = 28 + 63 + 2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7} \cdot \frac{1}{2} = 133$

Siga $\angle CDB = \alpha, \angle BDA = \beta$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\frac{3\sqrt{7}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{133}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{57}}{38}, \cos\alpha = \frac{7\sqrt{19}}{38}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$81 = 16 + 133 - 2 \cdot 4\sqrt{133} \cdot \cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{17\sqrt{133}}{266}, \sin\beta = \frac{9\sqrt{399}}{266}$$

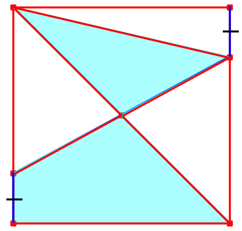
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$AC^2 = 16 + 28 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{7} \cdot \cos(\alpha + \beta) = 44 - 16\sqrt{7}\left(\frac{7\sqrt{19}}{38} \cdot \frac{17\sqrt{133}}{266} - \frac{3\sqrt{57}}{38} \cdot \frac{9\sqrt{399}}{266}\right)$$

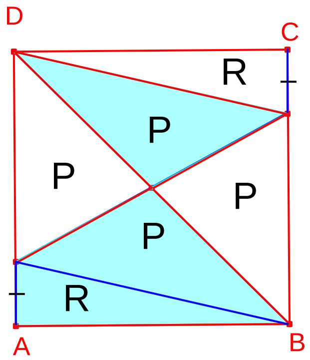
$AC^2 = 36$

$x = \overline{AC} = 6$

4483.- Un quadrat està dividit per una diagonal i un segment.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:

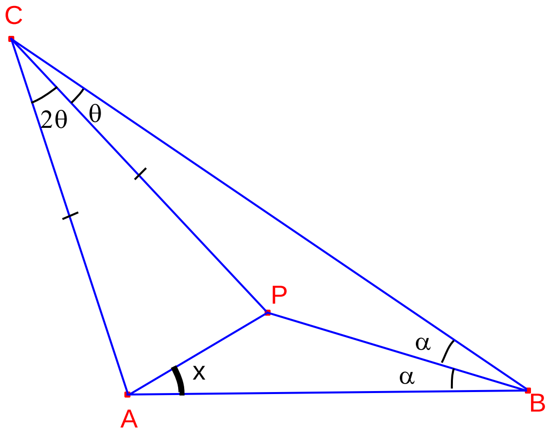


[ABCD]=4P+2R

[blava]=2P+R

[blava]/[ABCD]=1/2

4484.- En la figura determineu la mesura de l'angle x



Solució:

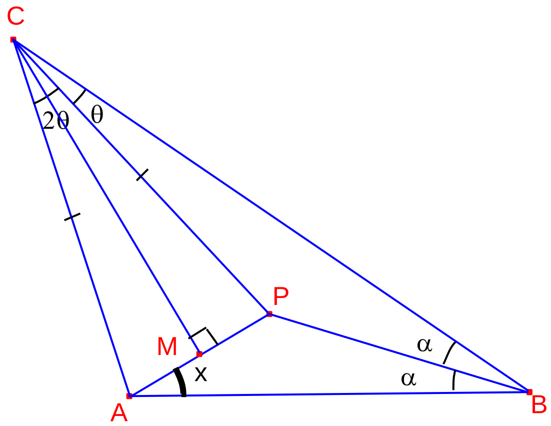
Siga $\overline{AC} = \overline{CP} = a$

Siguen $\overline{AP} = p, \overline{BP} = q$

Siga M el punt mig del segment $\overline{AP}$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:

$$\frac{p}{2b} = \sin\theta$$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCP}$:

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{q}{\sin\theta}$$

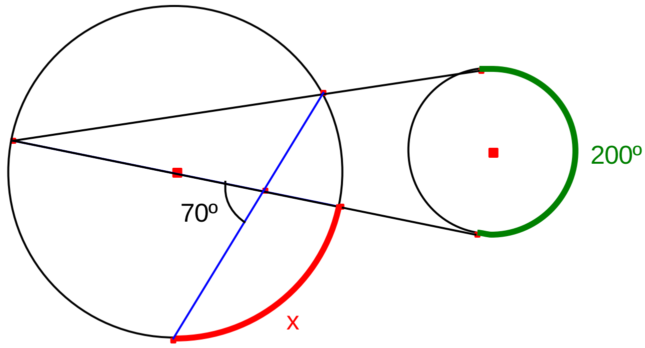
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\frac{p}{\sin\alpha} = \frac{q}{\sin x}$$

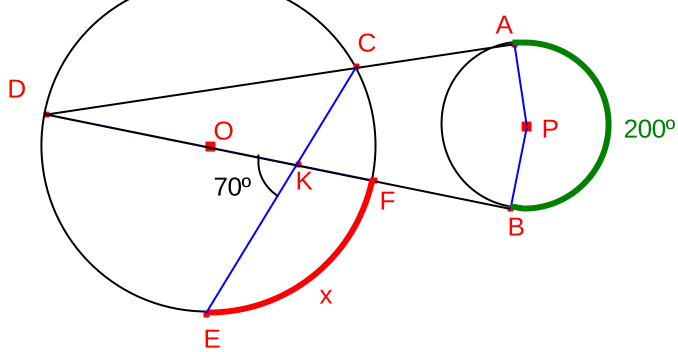
$$\sin x = \frac{q\cdot\sin\alpha}{p} = \frac{q\cdot\sin\alpha}{2b\cdot\sin\theta} = \frac{1}{2}$$

Aleshores, $x = 30°$

4485.- La figura està formada per dues circumferències.
Des d'un punt de la circumferència de l'esquerra s'ha traçat dues tangents a la circumferència de la dreta.
Calculeu la mesura de l'arc x.



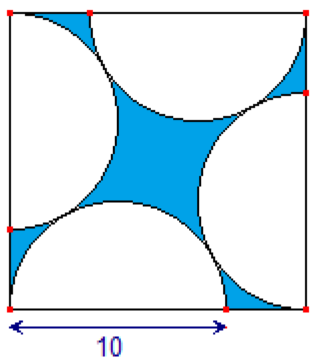
Solució:



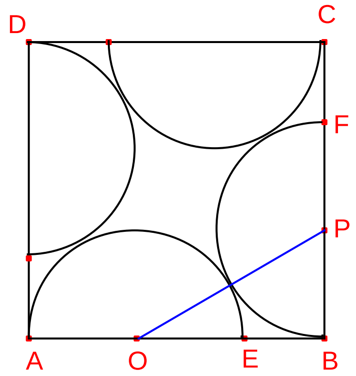
Considerem el quadrilàter $DBPA$.
$\angle APB = 160°, \angle DAP = DBP = 90°$
Aleshores, $\angle ADB = 20°$
$\angle COF = 2 \cdot 20° = 40°$

Siga $\angle DOE = \alpha$
$$70° = \angle DKE = \frac{\alpha + 40°}{2}$$
$\alpha = 100°$
$x = \angle EOF = 180° - \alpha = 80°$

4486.- Un quadrat conté quatre semicercles iguals, tangents i de diàmetre 10.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

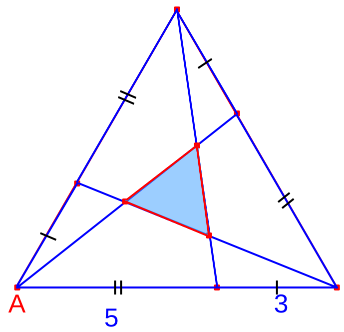


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Sigua la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{AE} = 10$
Sigua la circumferència de centre P i diàmetre $\overline{BF} = 10$
$\overline{OP} = 10, \overline{BP} = 5$

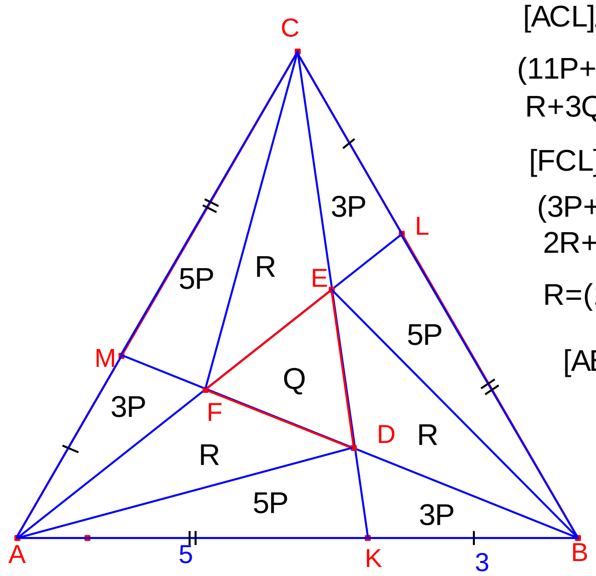


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBP}$:
$\overline{OB} = 5\sqrt{3}$
$\overline{AB} = 5(1+\sqrt{3})$
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat $ABCD$ menys l'àrea de dos cercles de radi 5:
$S_{ombrejada} = \left(5(1+\sqrt{3})\right)^2 - 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 50(2+\sqrt{3}-\pi) \approx 29.5229$

4487.- La figura està formada per un triangle equilàter tal que els costats s'han dividit en dos segments de longituds 5, 3.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del triangle equilàter.



Solució:



[ACL]/[ABL]=3/5

(11P+R)/(13P+2R+Q)=3/5

R+3Q=16P

[FCL]/[FBL]=3/5

(3P+R)/(5P+R+Q)=3/5

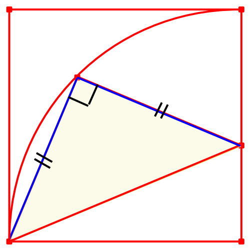
2R+3Q=0

R=(13/3)P, Q=(32/9)P

[ABC]=24P+3R+Q=(392/9)P

[DEF]/[ABC]=4/49

4488.- La figura està formada per un quadrat, un quadrant i un triangle rectangle isòsceles.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AKL}, \overline{AK} = \overline{LK} = a$

$\overline{AL} = \overline{EL} = a\sqrt{2}$

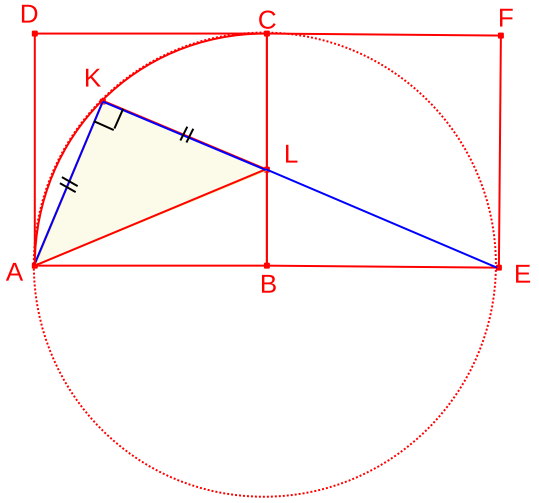
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKE}$

$4c^2 = a^2 + \left(\left(1+\sqrt{2}\right)a\right)^2$

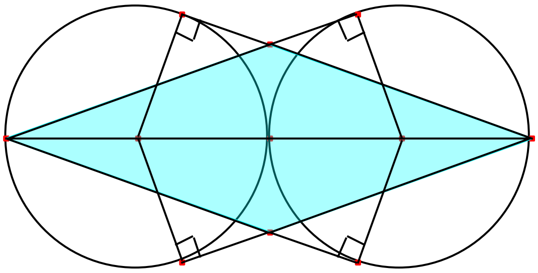
$2c^2 = \left(2+\sqrt{2}\right)a^2$

La proporció d'àrees entre l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKL}$ i l'àrea del quadrat $ABCD$ és:

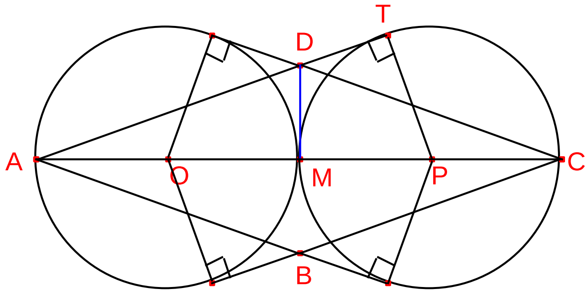
$$\frac{S_{AKL}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{c^2} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$



4489.- La figura està formada per dues circumferències de radi 1.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:
Siga el quadrilàter $ABCD$, $\overline{AC} = 4$
$\overline{AP} = 3, \overline{PT} = 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:
$\overline{AT} = 2\sqrt{2}$
$\overline{CM} = 2$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATP}, \overset{\Delta}{CDM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

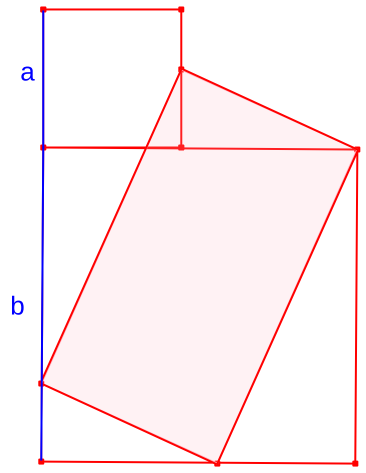
$$\frac{\overline{DM}}{1} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

$$\overline{DM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

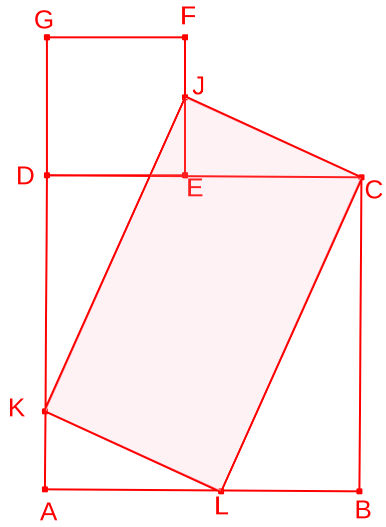
L'àrea del quadrilàter ombrejat $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = \overline{AC} \cdot \overline{DM} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

4490.- La figura està formada per dos quadrats de costats a, b.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat en funció de a, b.



Solució:



DG=a, AD=b

AL=CE=b-a

BL=a

CL=sqrt(a^2+b^2)

KAL, CBL semblants

Teorema Tales:

KL=(b-a)/b·sqrt(a^2+b^2)

[CJKL]=KL·CL=(b-a)(a^2+b^2)/b