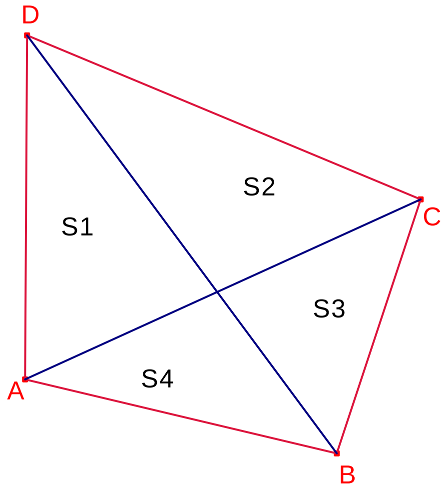
Problemes de Geometria per a l'ESO 45

441.- En un quadrilàter cada diagonal divideix el quadrilàter en dues parts d'igual àrea. Proveu que les diagonals divideixen el quadrilàter en quatre parts d'igual àrea.
KöMaL, abril 99, Gy3274.



Solució:
Siguen S_1, S_2, S_3, S_4 els quatre triangles que les diagonals $\overline{AC}, \overline{BD}$ del quadrilàter ABCD divideixen el quadrilàter.

La diagonal $\overline{AC}$ divideix el quadrilàter en dues parts d'igual àrea, aleshores:

$S_1 + S_2 = S_3 + S_4$.

$$S_1 + S_2 - S_3 - S_4 = 0 \quad (1)$$

La diagonal $\overline{BD}$ divideix el quadrilàter en dues parts d'igual àrea, aleshores:

$S_1 + S_4 = S_2 + S_3$.

$$S_1 - S_2 - S_3 + S_4 = 0 \quad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$2S_1 - 2S_3 = 0$.

Aleshores, $S_1 = S_3$ (3)

Restant les expressions (1) (2):

$2S_2 - 2S_4 = 0$.

Aleshores, $S_2 = S_4$ (4)

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees son proporcionals a les bases, aleshores:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3} \quad (5)$$

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4 \quad (6)$$

Substituint les expressions (3) (4) en l'expressió (6):

$$S_1^{\ 2} = S_2^{\ 2} \quad (7)$$

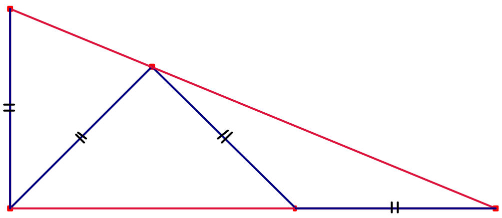
$S_1 = S_2$

Aleshores, $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

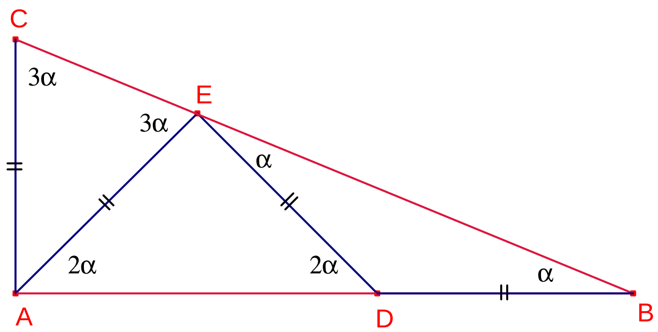
Notem que la intersecció de les diagonals és el punt mig de les diagonals, aleshores, el quadrilàter és paral·lelogram.

Ricard Peiró i Estruch

442.-Calculeu els angles aguts del triangle rectangle de la figura el qual ha estat dividit en 3 triangles isòsceles tots de costats iguals.
KöMaL, K44.



Solució:



Siga $\alpha = \angle ABC$. $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{DE} = \overline{BD}$

$\angle BED = \alpha$.

$\angle ADE = \angle DBE + \angle BED = 2\alpha$.

$\angle EAD = \angle ADE = 2\alpha$.

$\angle AEC = \angle ABE + \angle EAB = 3\alpha$.

$\angle ACB = \angle AEC = 3\alpha$.

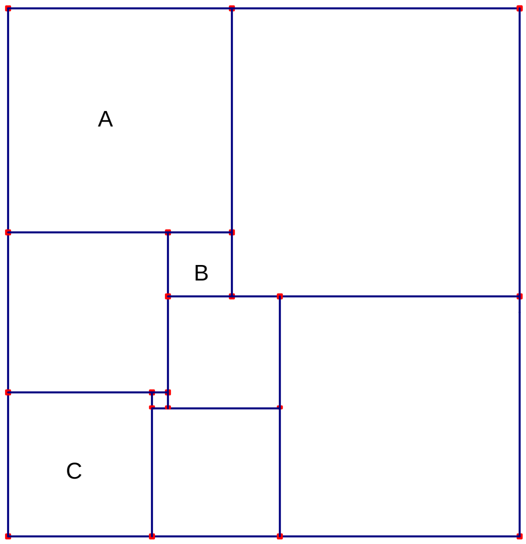
$\angle ABC + ACB = 90^o$.

$\alpha + 3\alpha = 90^o$.

Resolent l'equació:

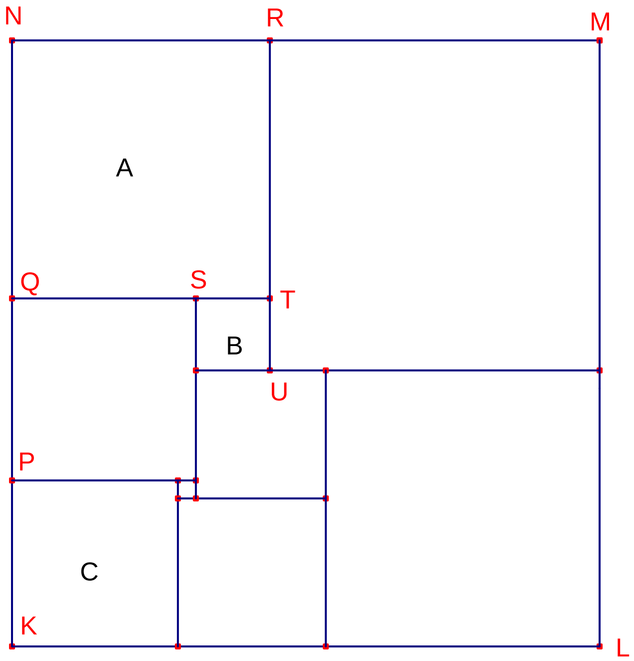
$\alpha = 22'30'$.

$C = 3\alpha = 67^o 30'$.



443.- El rectangle de la figura s'ha disseccionat en quadrats.
L'àrea del quadrat A és 196cm^2, la del quadrat B és 16cm^2 i la del quadrat C és 81cm^2.
Calculeu l'àrea del rectangle.
KöMaL, K307.

Solució:



$\overline{NR} = \overline{NQ} = \overline{QT} = \overline{RT} = \sqrt{196} = 14$.
$\overline{ST} = \overline{TU} = \sqrt{16} = 4$.
$\overline{QS} = \overline{QP} = \overline{QT} - \overline{ST} = 14 - 4 = 10$.
$\overline{KP} = \sqrt{81} = 9$.

$\overline{KN} = \overline{KP} + \overline{QP} + \overline{NQ} = 9 + 10 + 14 = 33\text{cm}$.

$\overline{RM} = \overline{RU} = \overline{RT} + \overline{TU} = 14 + 4 = 18$.

$\overline{NM} = \overline{NR} + \overline{RM} = 14 + 18 = 32\text{cm}$.

L'àrea del rectangle KLMN és:
$S_{KLMN} = \overline{NM} \cdot \overline{KN} = 32 \cdot 33 = 1056\text{cm}^2$.

444.- Proveu que si dos angles oposats d'un quadrilàter convex circumscrit a una circumferència són rectes el quadrilàter és un cometa.
KöMaL, C1098.

Solució:
Siga el quadrilàter ABCD circumscrit a la circumferència de centre O i radi r.
Siguen K, L M i N els punts de tangència del quadrilàter i la circumferència.

$\overline{AK} = \overline{AL}$.

$\overline{OK} = r$ és perpendicular a $\overline{AD}$, $\overline{ON} = r$ és perpendicular a $\overline{CD}$.

$\angle KDN = 90^{o}$.

Aleshores, DKON és un quadrat, per tant,

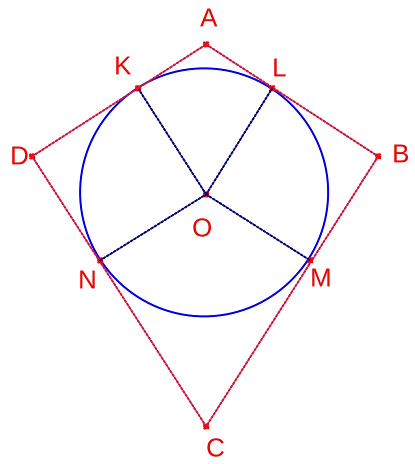
$\overline{DK} = \overline{OK} = r$.

Anàlogament, $\overline{BL} = r$.

Aleshores, $\overline{AD} = \overline{AB}$.

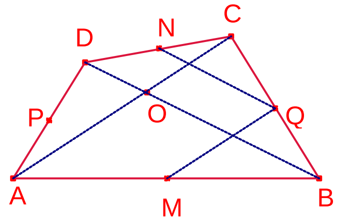
Anàlogament, $\overline{CD} = \overline{CB}$.

Aleshores, ABCD és un cometa.

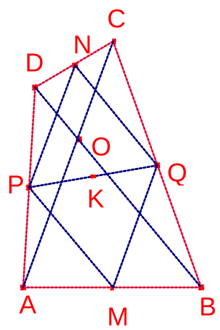


445.- En un quadrilàter ABCE M és el punt mig del costat $\overline{AB}$ i N el punt mig del costat $\overline{CD}$. Les longituds de les diagonals $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ és $2\sqrt{3}$ i formen un angle de 60º.
Determineu la mesura del segment $\overline{MN}$.
KöMaL, C1099.

Solució.
Siga O la intersecció de les diagonals $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.



a) Suposem que $\angle BOC = \angle AOD = 60^o$.
Siga Q el punt mig del costat $\overline{BC}$.
$\overline{NQ}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{DCB}$.
$\overline{MQ}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aleshores, $\overline{NQ} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \sqrt{3}$, $\overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \sqrt{3}$, $\angle NQM = \angle AOD = 60^o$.
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{MQN}$ és equilàter, aleshores:
$\overline{MN} = \overline{NQ} = \sqrt{3}$.



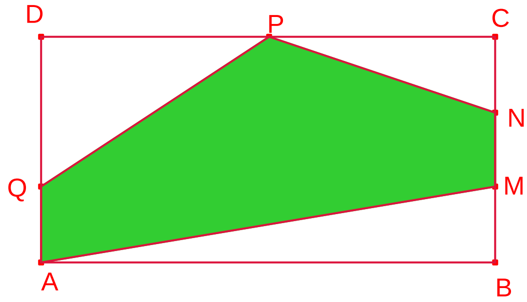
b) Suposem que $\angle BOC = \angle AOD = 120^o$.
Siguen P, Q els punts migs dels costats $\overline{AD}$ $\overline{BC}$, respectivament.
$\overline{NQ}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{DCB}$.
$\overline{NP}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.
Aleshores, $\overline{NQ} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \sqrt{3}$, $\overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \sqrt{3}$, $\angle PNQ = \angle AOB = 60^o$.
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{PQN}$ és equilàter.
Anàlogament el triangle $\overset{\Delta}{PQM}$ és equilàter.
Siga K el punt mig del costat $\overline{PQ}$
$\overline{MN} = 2 \cdot \overline{KN}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKN}$
$\overline{KN} = \sqrt{\overline{NP}^2 - \overline{PK}^2} = \frac{3}{2}$.
$\overline{MN} = 2 \cdot \overline{KN} = 3$.

446.- En la figura ABCD és un rectangle de 108cm de perímetre.

$\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{AQ} = \overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC}$, $\overline{DP} = \overline{PC}$.

Calculeu l'àrea del pentàgon AMNPQ.

Olimpíada Ñandú 2011. Nivell 3.



Solució:

Siga $\overline{AQ} = \overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC} = x$.

$\overline{BC} = 3x$, $\overline{AB} = 2\overline{BC} = 6x$, $\overline{DQ} = 2x$.

El perímetre del rectangle ABCD és 108cm, aleshores:

$18x = 108$. Resolent l'equació:

$x = 6$.

$\overline{AB} = 36$, $\overline{BC} = 18$.

$\overline{DP} = \overline{PC} = 18$, $\overline{DQ} = 12$.

L'àrea del pentàgon AMNPQ és:

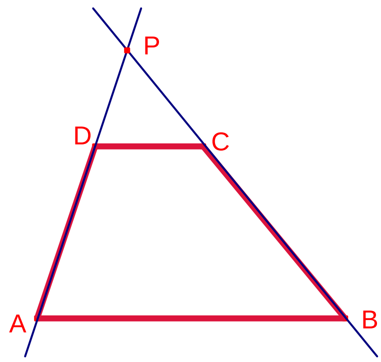
$$S_{AMNPQ} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{NCD} + S_{PDQ})$$

$$S_{AMNPQ} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} - \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BM}}{2} + \frac{\overline{CP} \cdot \overline{CN}}{2} + \frac{\overline{PD} \cdot \overline{DQ}}{2}\right).$$

$$S_{AMNPQ} = 36 \cdot 18 - \left(\frac{36 \cdot 6}{2} + \frac{18 \cdot 6}{2} + \frac{18 \cdot 12}{2}\right) = 378\text{cm}^2.$$

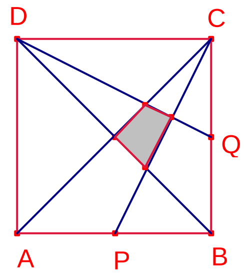
447.- Coneixent els quatre costats d'un trapezi, calculeu les longituds dels costats del triangle format pels seus costats no paral·lels (exterior al trapezi).
José Cubillo, 111.

Solució:
Siga ABCD el trapezi de costats paral·lels $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ i costats no paral·lels $\overline{AD} = c$, $\overline{BC} = d$.
Suposem que $b < a$.
Siga P la intersecció de les rectes AD, BC.
Siga $\overline{CP} = x$, $\overline{DP} = y$, costats del triangle $C\overset{\Delta}{D}P$.



Els triangles $D\overset{\Delta}{C}P$. $A\overset{\Delta}{B}P$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{d+x}{a} = \frac{x}{b} = \frac{d}{a-b}.$$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{bd}{a-b}.$$
$$\frac{c+y}{a} = \frac{y}{b} = \frac{c}{a-b}.$$
Resolent l'equació:
$$y = \frac{bc}{a-b}.$$

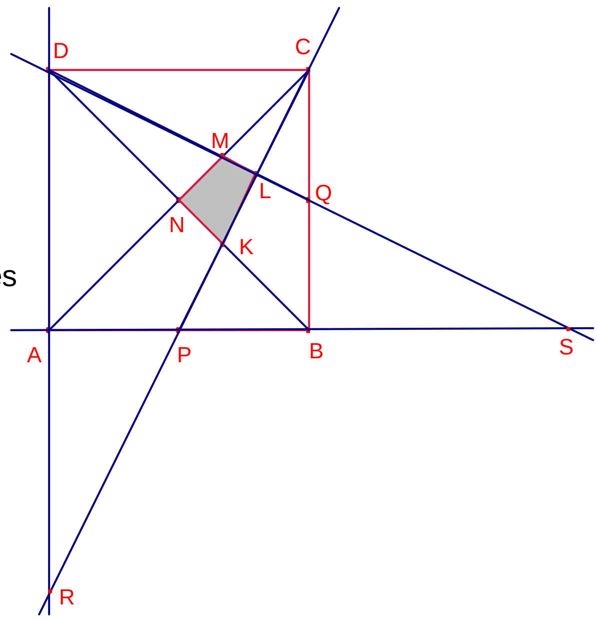
448.- En la figura ABCD és quadrat P i Q són punts migs dels costats del quadrat.
Calculeu la raó entre les àrees de la zona ombrejada i la del quadrat.
Revista OIM, 43



Solució:
Siga K, L, M, N els vèrtexs del quadrilàter ombrejat.

Els triangles $P\overset{\Delta}{B}K$, $C\overset{\Delta}{D}K$ són semblants i la raó de semblança és 1:2.
Aleshores:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{DK}}=\frac{1}{2},\ \overline{BK}=\frac{1}{3}\overline{BD}.$$



N és el centre del quadrat, $\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{BD}$.

$$\overline{NK}=\overline{BN}-\overline{BK}=\frac{1}{6}\overline{BD}.$$

Els triangles $B\overset{\Delta}{C}D$, $K\overset{\Delta}{C}N$ tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases. Aleshores:

$$S_{KCN}=\frac{1}{6}S_{BCD}=\frac{1}{6}\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{12}S_{ABCD}.$$

La recta CP talla la recta AD en el punt R.

$$\overline{AR}=\overline{AD}.$$

Els triangles $C\overset{\Delta}{M}Q$, $A\overset{\Delta}{M}D$ són semblants i la raó de semblança és 1:2.

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{DM}}=\frac{1}{2},\ \overline{MQ}=\frac{1}{3}\overline{DQ}.$$

Els triangles $C\overset{\Delta}{L}Q$, $R\overset{\Delta}{L}D$ són semblants i la raó de semblança és 1:4.

$$\frac{\overline{QL}}{\overline{DL}}=\frac{1}{4},\ \overline{QL}=\frac{1}{5}\overline{DQ}.$$

$$\overline{ML}=\overline{MQ}-\overline{QL}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\overline{BD}=\frac{2}{15}\overline{BD}.$$

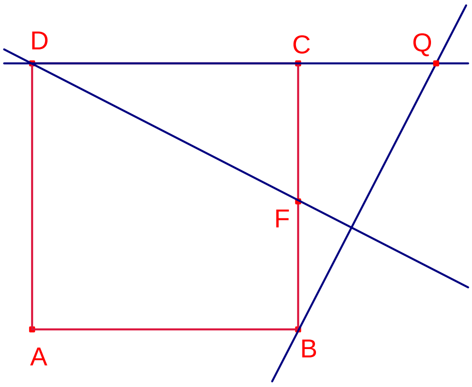
Els triangles $L\overset{\Delta}{C}M$, $Q\overset{\Delta}{C}D$ tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases. Aleshores:

$$S_{LCM}=\frac{2}{15}S_{QCD}=\frac{2}{15}\frac{1}{4}S_{ABCD}=\frac{1}{30}S_{ABCD}.$$

$$S_{KLMN}=S_{KCN}-S_{LCM}=\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{30}\right)S_{ABCD}=\frac{1}{20}S_{ABCD}.$$

449.- Siga el quadrat ABCD i F un punt qualsevol del costat $\overline{BC}$.
Pel punt B tracem la perpendicular a la recta DF que talla la recta DC en el punt Q.
Determineu la mesura de l'angle $\angle FQC$.

Solució:

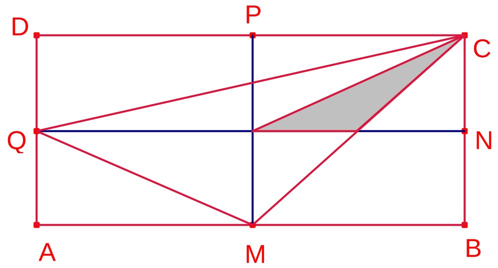


Siga $\alpha = \angle FDC$, aleshores $\angle CBQ = \alpha$.
$\overline{DC} = \overline{CF}$.

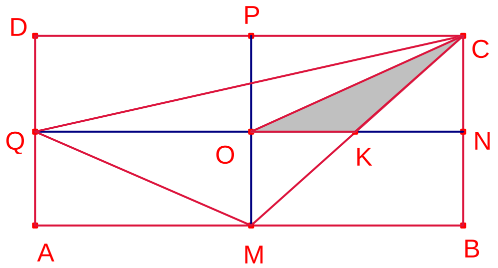
Per tant, els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{C}F$, $B\overset{\Delta}{C}Q$ són iguals.
Aleshores, $\overline{CF} = \overline{CQ}$.

El triangle rectangle $C\overset{\Delta}{F}Q$ és isòsceles, aleshores:
$\angle FQC = 45^{\circ}$.

450.- En el rectangle ABCD, M, N, P, Q són els punts migs dels costats.
Si l'àrea del triangle ombrejat és 1, calculeu l'àrea del rectangle ABCD i del triangle $\overset{\Delta}{CQM}$.



Solució:
Siga O la intersecció dels segments $\overline{PM}$, $\overline{QN}$ (centre del rectangle)
Siga K la intersecció dels segments $\overline{CM}$, $\overline{QN}$.
Notem que ON és paral·lela mitjana del rectangle MBCQ.
Aleshores, K és el punt mig del segment $\overline{ON}$.
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.



Els triangles $\overset{\Delta}{OKC}$, $\overset{\Delta}{QKC}$ tenen la mateixa altura aleshores:
$\frac{S_{ONC}}{S_{OKC}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OK}} = 2$, aleshores, $S_{ONC} = 2$.
$S_{ONCP} = 2 \cdot S_{ONC} = 4$.
$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{ONCP} = 16$.

$\overline{QK} = 3 \cdot \overline{OK}$
Els triangles $\overset{\Delta}{OKC}$, $\overset{\Delta}{QOC}$ tenen la mateixa altura aleshores:
$\frac{S_{QKC}}{S_{OKC}} = \frac{\overline{QK}}{\overline{OK}} = 3$, aleshores, $S_{QKC} = 3$.
$\overline{CN} = \overline{BN}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{QKC}$, $\overset{\Delta}{QKM}$ tenen la mateixa base i la mateixa altura, aleshores tenen la mateixa àrea.
aleshores les àrees són proporcionals a les altures:
$\frac{S_{OKM}}{S_{OKC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{OM}} = 1$, aleshores, $S_{QKM} = S_{QKC} = 3$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CQM}$ és:
$S_{CQM} = S_{QKC} + S_{QKM} = 3 + 3 = 6$.