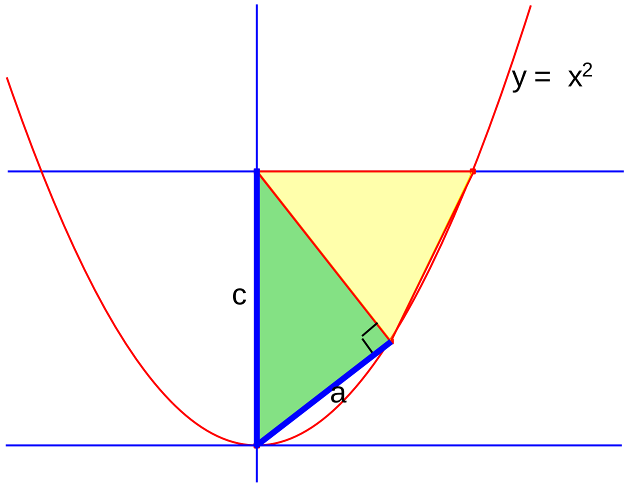
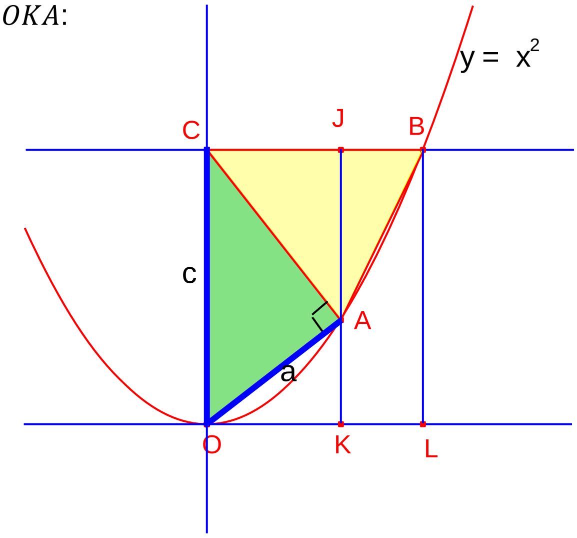
4491.- La figura està formada per la paràbola $y = x^2$ i dos triangles d'igual àrea.
Determineu els valors a, c



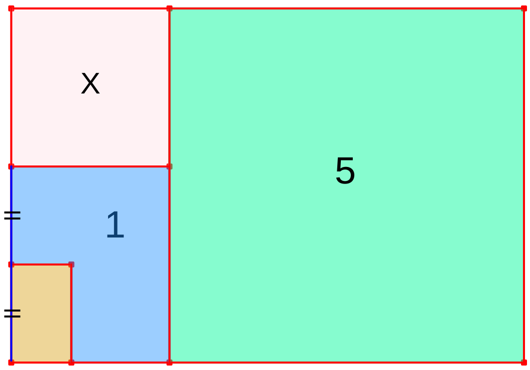
Solució:
Siguen $\overline{OA} = a, \overline{OC} = c$
$\overline{AC} = \sqrt{c^2 - a^2}$
$\overline{BC} = \overline{OL} = \sqrt{c}$
Siga $\overline{OK} = x$
$\overline{KA} = x^2, \overline{AJ} = c - x^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKA}$:
$a^2 = x^2 + x^4$

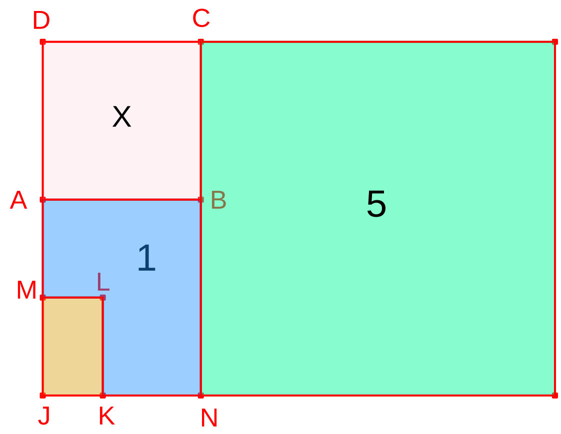


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OKA}, \overset{\Delta}{CAO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$x^2 = \frac{a^2}{c}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OKA}, \overset{\Delta}{AJC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$x^2 = c - 1$
$a^2 = c(c - 1)$
Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{OKA}, \overset{\Delta}{ABC}$ són iguals:
$\frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c}(c - x^2)$
$a\sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{c}(c - c - a)$
$a^2(c^2 - a^2) = c$
$c(c - 1)\left(c^2 - c(c - 1)\right) = c$
$c^2 - c - 1 = 0$
$c = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$
$a = 1$

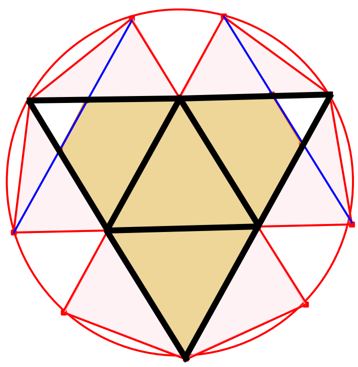
4492.- La figura està formada per un quadrat d'àrea 5, un quadrat d'àrea X, un rectangle auri i un hexàgon d'àrea 1. Calculeu l'àrea X del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
$\overline{CN} = \sqrt{5}$
$\overline{BN} = \sqrt{5} - a$
$\overline{AM} = \overline{JM} = \dfrac{\sqrt{5} - a}{2}$
El rectangle $JKLM$ és auri:
$\overline{JK} = \dfrac{\sqrt{5} - a}{2\Phi}$
L'àrea de l'hexàgon $AMLKNB$ és 1:
$a(\sqrt{5} - a) - \dfrac{\sqrt{5} - a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{5} - a}{2\Phi} = 1$
Resolent l'equació:
$a = 1$
$S_{ABCD} = 1$



4493.- En la figura els triangles negres són equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea rosa



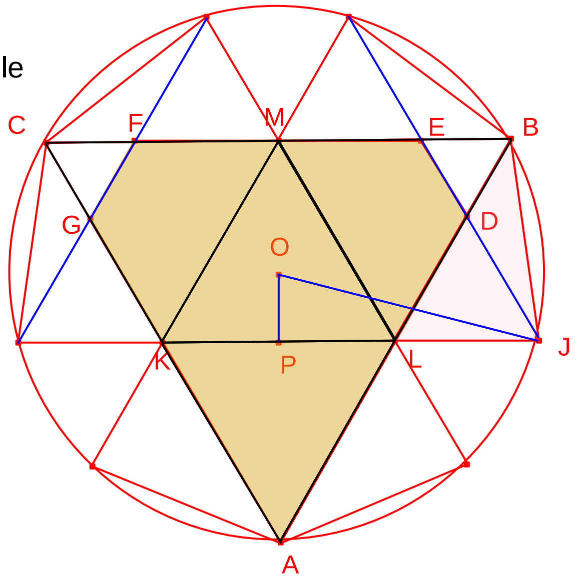
Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ de costat $\overline{KL} = 1$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 2$

Siga la circumferència de centre O circumscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\overline{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



Siga $\overline{JL} = a$

$\overline{DE} = 1 - a$

L'àrea de l'hexàgon $ADEFG$ és:

$$S_{groga} = S_{ABC} - 2 \cdot S_{DBE} = \frac{\sqrt{3}}{4} - 2\frac{\sqrt{3}}{4}(1-a)^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(-a^2 + 2a + 1)$$

L'àrea rosa és:

$$S_{rosa} = 6 \cdot S_{ABC} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$$

Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPJ}$.

$$R^2 = \left(R - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$$

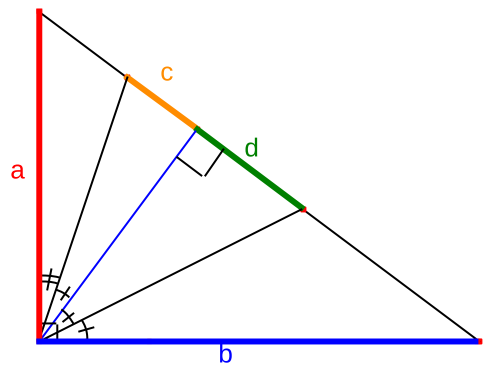
Resolent l'equació:

$$a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

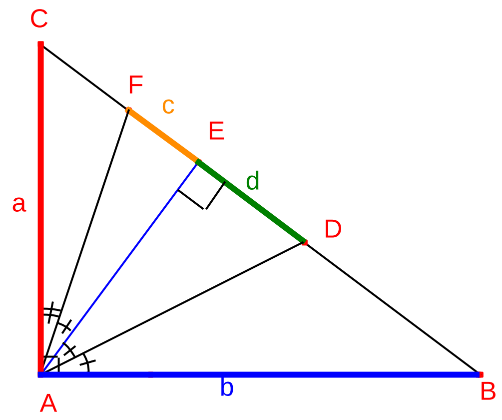
$$S_{groga} = \frac{\sqrt{3}}{2}(-a^2 + 2a + 1) = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \sqrt{5})$$

$$S_{rosa} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \sqrt{5})$$

4494.- En el triangle rectangle de la figura $a:b=3:4$
Calculeu $\frac{c}{d}$



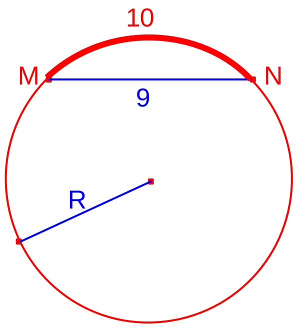
Solució:
Siga $\overline{AB}=4, \overline{AC}=4$
$\overline{BC}=5$
$\overline{AE}=\frac{12}{5}, \overline{BE}=\frac{16}{5}, \overline{CE}=\frac{9}{5}$
Aplicant la propietat de la bisectriu:



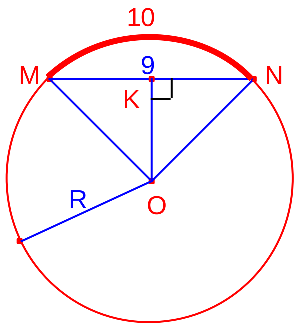
$$\frac{d}{\frac{12}{5}}=\frac{\frac{16}{5}-d}{4}$$
$$d=\frac{6}{5}$$

$$\frac{c}{\frac{12}{5}}=\frac{\frac{9}{5}-c}{4}$$
$$c=\frac{4}{5}$$
$$\frac{c}{d}=\frac{2}{3}$$

4495.- La figura està formada per un circumferència una corda $\overline{MN} = 9$ i l'arc menor que abraça mesura 10. Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:
Siga K el punt mig de la corda $\overline{MN}$
Siga $\angle KON = \alpha$ (l'angle mesurat en radians)



$$\sin\alpha = \frac{9}{2R}$$

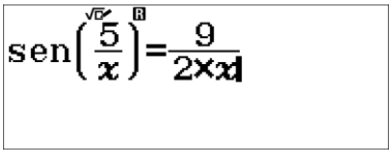
La mesura de l'arc és:

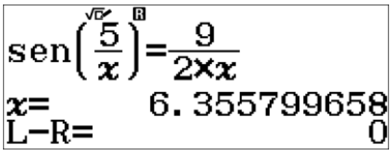
$$10 = 2\alpha R$$

$$\alpha = \frac{5}{R}$$

$$\sin\frac{5}{R} = \frac{9}{2R}$$

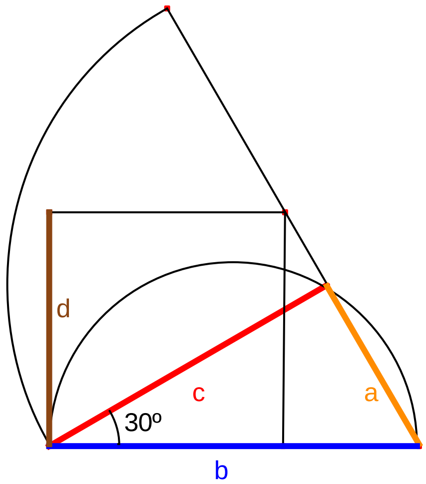
Utilitzarem la calculadora Casio 991 per resoldre l'equació transcendent:





Aleshores:
$R \approx 6.3558$

4496.- La figura està formada per una semicircumferència un quadrant i un quadrat.
Proveu que $a+b=c+d$



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O\overset{\Delta}{B}A$:

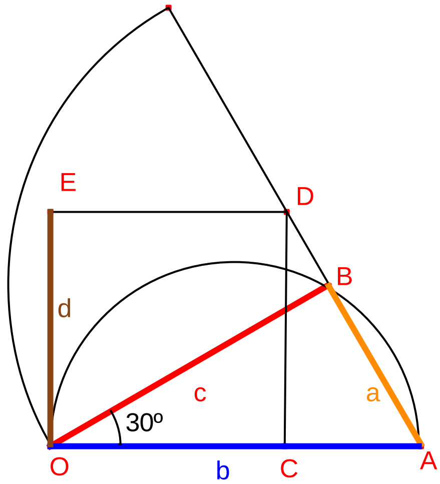
$a=\frac{1}{2}b, c=\frac{\sqrt{3}}{2}b$

Els triangles rectangles $O\overset{\Delta}{B}A, D\overset{\Delta}{C}A$ són semblants:

$\overline{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}d$

$OC=d=b-\frac{\sqrt{3}}{3}d$

$d=\frac{3-\sqrt{3}}{2}b$

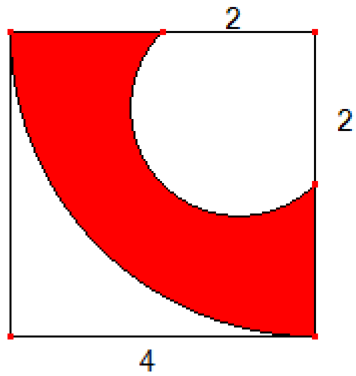


$a+b=\frac{3}{2}b$

$c+d=\frac{\sqrt{3}}{2}b+\frac{3-\sqrt{3}}{2}b=\frac{3}{2}b$

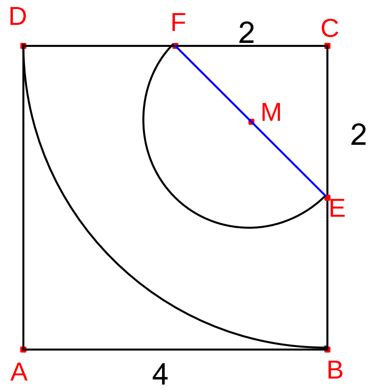
Aleshores, $a+b=c+d$

4497.- La figura està formada per un quadrat de costat 4, un quadrant i un arc.
Calculeu l'àrea ombrejada.

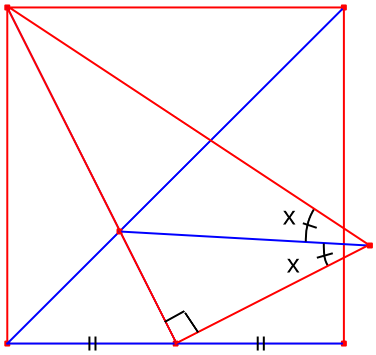


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siguen $\overline{CE} = \overline{CF} = 2$
Siga M el punt mig del segment $\overline{EF}$, centre de l'arc.
$\overline{MF} = \sqrt{2}$
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrant de radi 4 menys la suma de les àrees del semicercle de radi $\sqrt{2}$ i del triangle rectangle $\overset{\Delta}{CEF}$:

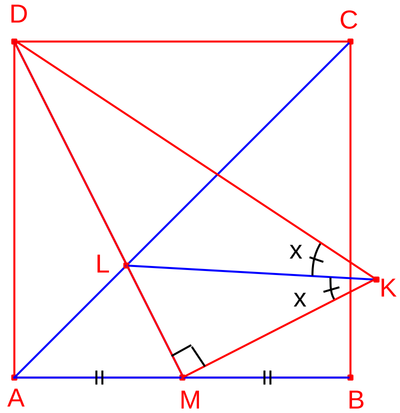
$$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}\pi \cdot 4^2 - \left(\frac{1}{2}\pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) = 3\pi - 2$$



4498.- La figura està formada per un quadrat i un triangle rectangle.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$



$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{1}{2}c$

Els triangles $\overset{\Delta}{AML}, \overset{\Delta}{CDL}$ són semblants i de raó $1 : 2$
Aplicant el teorema de Tales:

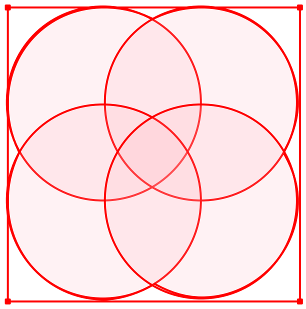
$$\frac{\overline{ML}}{\overline{DL}} = \frac{1}{2}$$

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{DMK}$

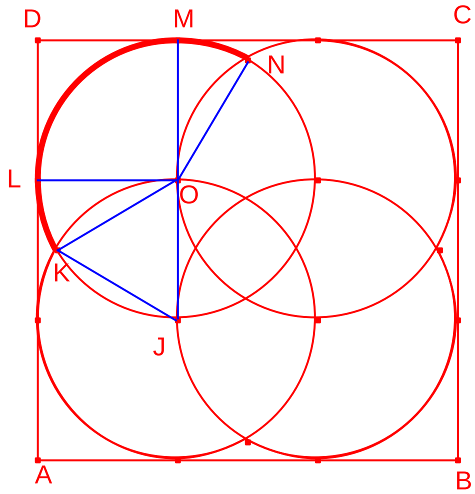
$$\frac{\overline{MK}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{DL}} = \frac{1}{2}$$

Aleshores, $\angle MKD = 60°$
$x = 30°$

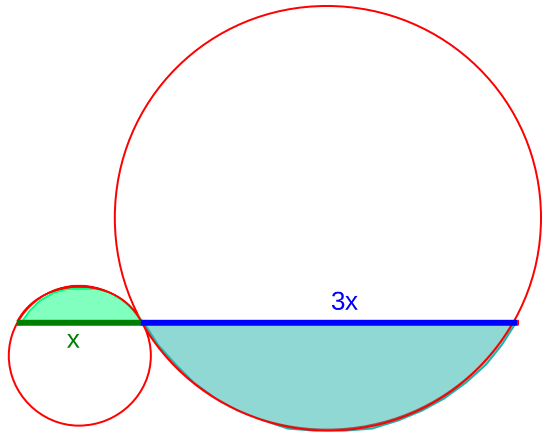
4499.- La figura està formada per un quadrat de costat 9 i quatre circumferències de radi 3.
Calculeu el perímetre de la zona ombrejada.



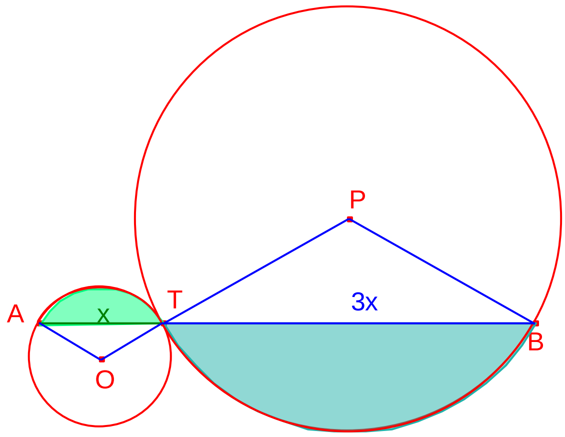
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 9$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OL} = \overline{OM} = 3$
Siga la circumferència de centre J i radi $\overline{JK} = \overline{JO} = 3$
El triangle $\overset{\Delta}{OJK}$ és equilàter.
Aleshores, $\angle KOL = \angle MOL = 30°$
$\angle KON = 150°$
El perímetre és igual a quatre vegades la longitud de l'arc de 150º i radi 3:
$$P = 4 \cdot \left(2\pi \cdot 3 \cdot \frac{150°}{360°}\right) = 10\pi$$



4500.- La figura està formada per dos circumferències tangents, dues cordes que passen pel punt de tangència de longituds $x, 3x$. Si la suma de les àrees dels segments circulars ombrejats és 40π calculeu l'àrea del segment verd.



Solució:



Siguen les circumferències de centres O, P.
Siguen les cordes $\overline{AT} = x, \overline{BT} = 3x$
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{AOT}, \overset{\Delta}{TPB}$ són semblants i de raó $1 : 3$
Les àrees dels segments circulars ombrejats són semblants i de raó $1 : 9$
L'àrea del segment verd és la desena part de la suma de les àrees dels dos segments.

$$S_{verda} = \frac{1}{10} \cdot 40\pi = 4\pi$$