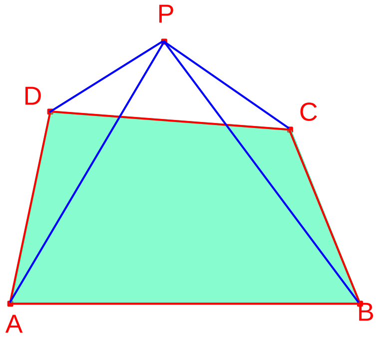
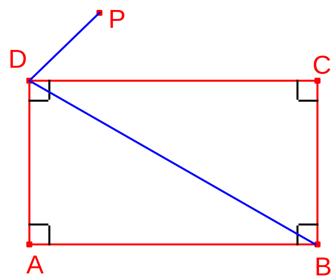
4501.- Quatre punts A, B, C, D formen un quadrilàter. Demostreu que és un rectangle si i només si per a qualsevol punt P tenim que
$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$



Solució:
Suposem que $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ per a qualsevol P.
Volem demostrar que $ABCD$ és un rectangle
Si $P = A$
$\overline{AA}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$
Si $P = C$
$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$
Sumant les dues expressions:
$2 \cdot \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$
Si $P = B$, $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$
Si $P = D$, $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$
Sumant les dues expressions:
$2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$

Aleshores, $\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2$
Aplicant el teorema invers de Pitàgores:
$A = B = C = D = 90°$

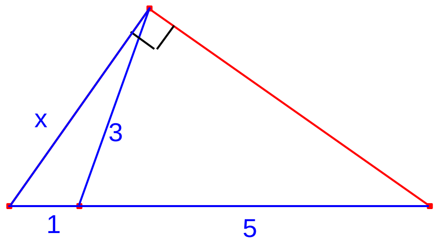


Suposem que $ABCD$ és un rectangle.
Siga P un punt qualsevol del plànol.
Siguen $\overline{AB} = a, \overline{AD} = b$
Siguen $\alpha = \angle PDC, \beta = \angle CDB$
$\sin\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{PDC}, \overset{\Delta}{PAD}$
$\overline{PC}^2 = a^2 + \overline{PD}^2 - 2a \cdot \overline{PD} \cdot \cos\alpha$, $\overline{PA}^2 = b^2 + \overline{PD}^2 - 2b \cdot \overline{PD} \cdot \cos\alpha$,
Sumant ambdues expressions:
$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot \overline{PD}^2 - 2\overline{PD} \cdot (\mathrm{a} \cdot \cos\alpha + b \cdot \sin\alpha)$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PBD}$
$$\overline{PB}^2 = a^2 + b^2 + \overline{PD}^2 - 2 \cdot \overline{PD} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\alpha + \beta) =$$
$$= a^2 + b^2 + \overline{PD}^2 - 2 \cdot \overline{PD} \cdot (a \cdot \cos\alpha - b \cdot sin\,\alpha$$

$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$

4502.- En el triangle rectangle de la figura calculeu la mesura del catet x

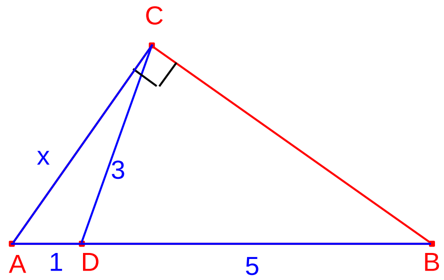


Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°, AB = 6$

Siga $\alpha = \angle CAB$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{6}$



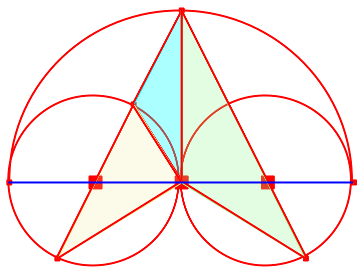
Aplicant el teorema del cosinus a triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$9 = 1 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \dfrac{x}{6}$

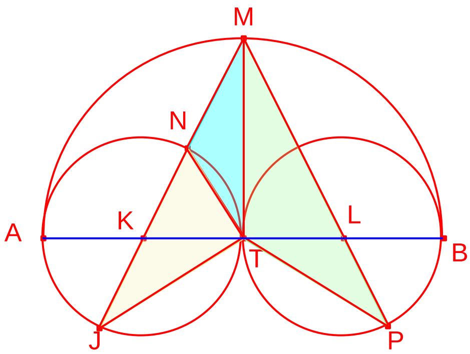
$x^2 = 12$

$x = 2\sqrt{3}$

4503.- La figura està formada per dues circumferència iguals i tangents i un semicercle que tenen els tres centress alineats.
Calculeu la proporció entre les àrees del triangle blau, el triangle groc i el triangle verd.



Solució:



Siga $\overline{AB} = 1, \overline{AT} = \overline{TM} = 2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KTM}$:

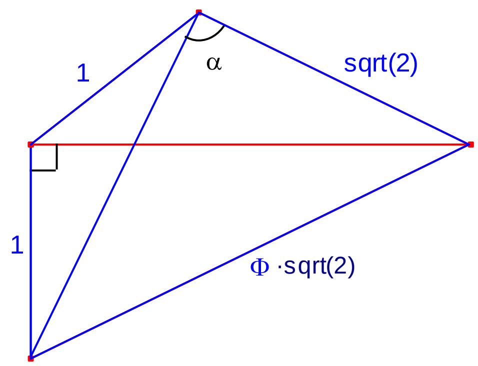
$\overline{KM} = \sqrt{5}$

$\overline{MN} = \sqrt{5} - 1, \overline{JN} = 2, \overline{PM} = 1 + \sqrt{5}$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:

$$S_{MNT} : S_{NLT} : S_{PMT} = \left(\sqrt{5} - 1\right) : 2 : \left(1 + \sqrt{5}\right) = \frac{1}{\Phi} : 1 : \Phi$$

4504.- En la figura calculeu la mesura de l'angle α



Solució:

Siga el quadrilàter $ABCD$ de costats $\overline{AB} = \Phi\sqrt{2}, \overline{BC} = \sqrt{2}. \overline{AD} = \overline{CD} = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{BD}^2 = 1 + 2\Phi$

$\cos A = \dfrac{1}{\Phi\sqrt{2}}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$

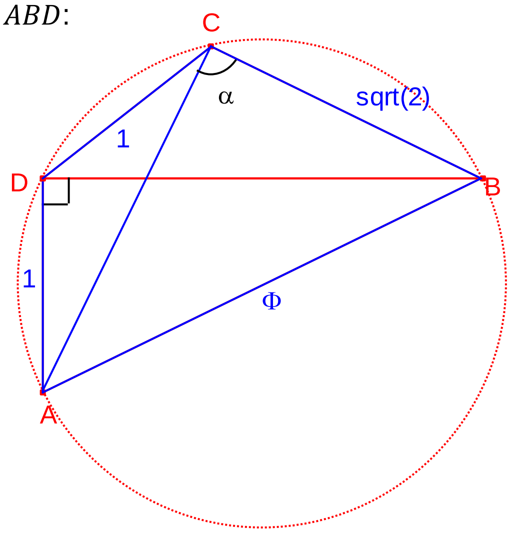
$1 + 2\Phi = 1 + 2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos C$

$\cos C = \dfrac{1 - \Phi}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\Phi\sqrt{2}}$

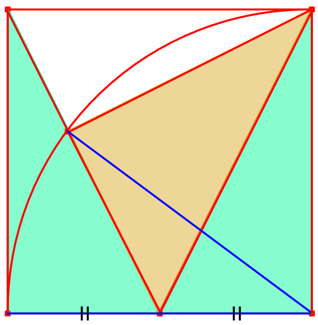
Aleshores, els angles A, C són suplementaris.

El quadrilàter $ABCD$ és cíclic.

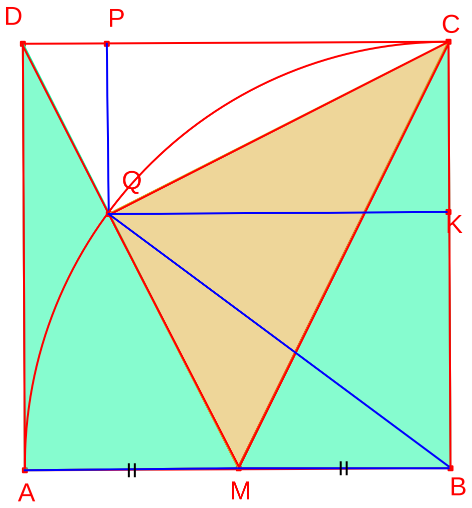
$\alpha = \angle ACB = \angle ADB = 90°$



4505.- La figura està formada per un quadrat, un quadrant i tres triangles.
Calculeu la proporció entre l’àrea marró i l’àrea verda



Solució:



AB=2, AM=1

verda]=2·(1/2)2·1=2

DP=x, PQ=2x

QK=2-x, BK=2-2x

Teorema Pitàgores QKB

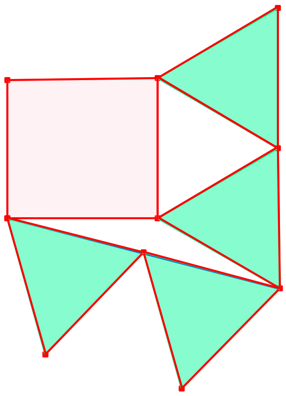
$4=(2-x)^2+(2-2x)^2$

x=2/5

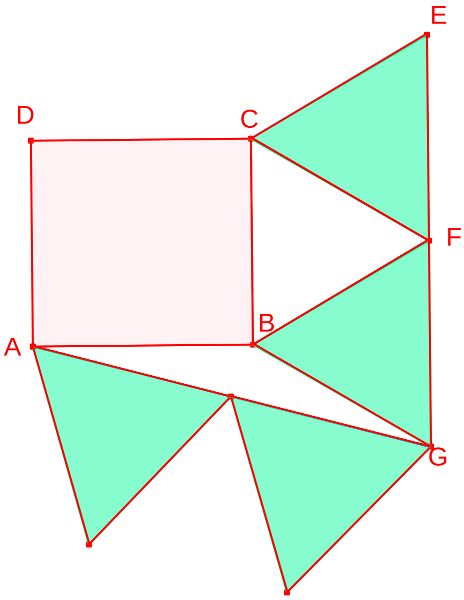
[marró]=2-(1/2)·2·2x=6/5

[marró]/[verda]=3/5

4506.- La figura està formada per un rectangle rosa i quatre triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea total verda i l'àrea del rectangle rosa.



Solució:



AB=b

AD=CE=a

angleABG=150º

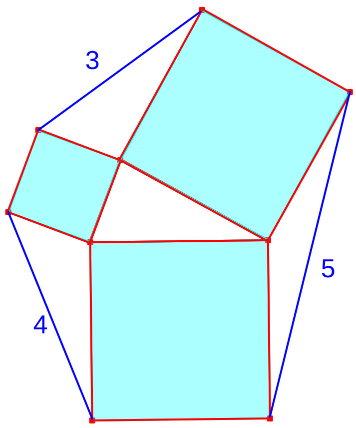
Teorema cosinus ABG

$4a^2=b^2+a^2+ab\cdot sqrt(3)$

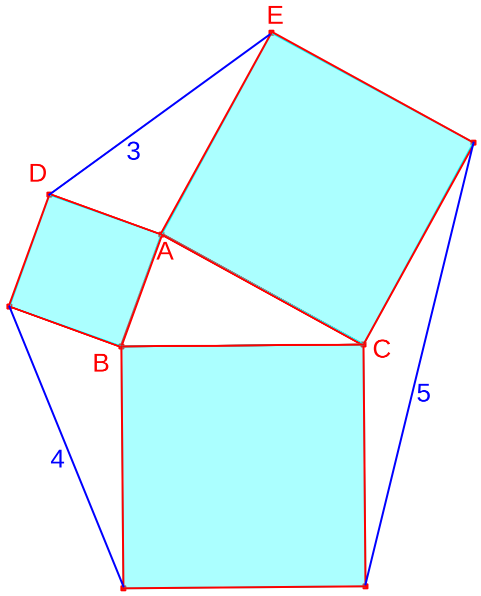
$b/a=sqrt(3)/\Phi$

$4\cdot[CEF]/[ABCD]=sqrt(3)a^2/(ab)=\Phi$

4507.- Sobre l’exterior dels costats d’un triangle s’han dibuixat tres quadrats.
Calculeu la suma de les àrees dels tres quadrats.



Solució:



BC=a, AC=b, AB=c

Teorema cosinus ABC

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

Teorema cosinus DAE

$9=b^2+c^2+2bc\cdot\cos A$

$a^2+9=2b^2+2c^2$

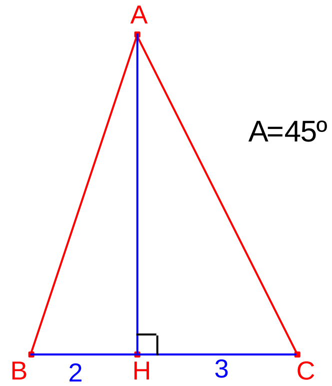
$b^2+16=2a^2+2c^2$

$c^2+25=2a^2+2b^2$

$3(a^2+b^2+c^2)=50$

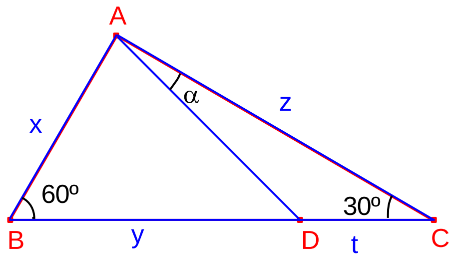
$[blava]=a^2+b^2+c^2=50/3$

4508.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overline{AH}$ l'altura.
Si $\overline{AH} = 2, \overline{CH} = 3, \angle BAC = 45°$, calculeu la mesura de l'altura $\overline{AH}$.



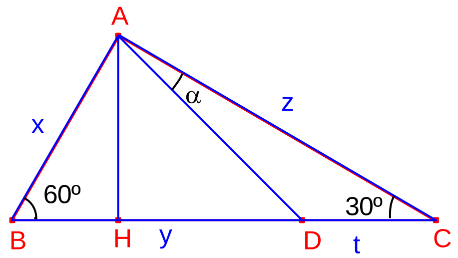
Solució:
Siga $x = \overline{AH}$
Siga $\alpha = \angle BAG, \angle HAC = 45° - \alpha$
$\tan\alpha = \frac{2}{x}$
$\frac{3}{x} = \tan(45° - \alpha) = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$\overline{AH} = x = 6$

4509.- En la figura, calculeu la mesura de l'angle α si $x + y = z + t$



Solució:

El triangle$\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $A = 90°$



$z = x\sqrt{3}$

$y + t = 2x$

$y - t = x + z = (\sqrt{3} - 1)x$

$y = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}x, t = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}$

Siga H la projecció de A sobre la hipotenusa $\overline{BC}$

$\overline{BH} = \dfrac{1}{2}x, \overline{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

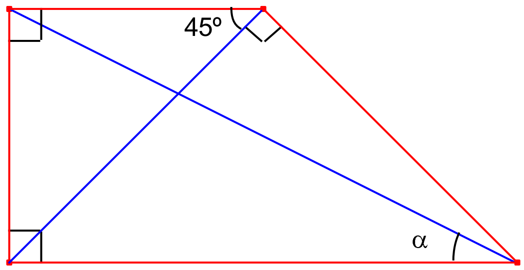
$\overline{DH} = y - \overline{BH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle HDA = 45°$

$\alpha + 30° = 45°$

$\alpha = 15°$

4510.- En la figura, calculeu la mesura de l'angle α



Solució:
El quadrilàter $ABCD$ és un trapezi de costats paral·lels $\overline{AB}, \overline{CD}$
$\angle DCB = 135°$
$\angle ABC = 45°$
$\overline{AD} = \overline{CA} = x$
Siga H la projecció de C sobre $\overline{AB}$
$\overline{CH} = \overline{BH} = x$
$\overline{AB} = 2x$
$\tan \alpha = \frac{1}{2}$